

---

**Programa de Pós-Graduação em Educação**  
**Universidade do Estado do Pará**  
**Belém-Pará- Brasil**



---

Revista Cocar V.13. N. 27. Set./Dez./ 2019 p.637-659 ISSN: 2237-0315

---

**Boneco Trapezista: Trigonometria via Modelagem Matemática com o auxílio do Geogebra**

*Trapeze Doll: Trigonometry via Mathematical Modeling with the aid of Geogebra*

Roberta Modesto Braga  
**Universidade Federal do Pará - UFPA**  
Amanda Maia Souza  
**Secretaria Municipal de Educação de Peixe-Boi-SEMED**  
Peixe-Boi – Pará- Brasil

**Resumo**

Este trabalho objetivou analisar como o uso do GeoGebra no processo de Modelagem Matemática pode otimizar o estudo de funções trigonométricas a partir do uso de um objeto cultural – boneco trapezista, no ensino médio. Para tanto, realizamos uma pesquisa de campo, de caráter qualitativo, onde os dados foram produzidos a partir de questionários e de uma atividade de Modelagem Matemática intitulada *modelando o movimento do boneco trapezista*. Da análise, concluímos que a Modelagem Matemática associada ao Software GeoGebra foi capaz de envolver os alunos na construção do próprio conhecimento gerando uma aprendizagem com significado e que os objetos matemáticos e não matemáticos interferem potencialmente na motivação e desenvolvimento da aprendizagem por meio da Modelagem Matemática, além disso o objeto cultural, boneco trapezista, utilizado foi fundamental para que os alunos percebessem a matemática das coisas.

**Palavras – chave:** Modelagem Matemática. GeoGebra. Funções trigonométricas.

**Abstract**

This work aims to analyze how the use of Geogebra in the process of Mathematical Modeling can optimize the study of trigonometric functions from the use of a cultural object - trapeze doll in high school. To do so, we performed a qualitative field research, where the collected data were collected through questionnaires and a Mathematical Modeling activity titled modeling the movement of the trapeze doll. From the analysis, we conclude that the Mathematical Modeling associated with the GeoGebra Software was able to involve the students in the construction of the own knowledge generating a more meaningful learning and that the mathematical and non mathematical objects potentially interfere in the motivation and development of the learning through the Mathematical Modeling. Moreover, the cultural object, trapezbe doll, used was fundamental for the studentes to understand the mathematics of things.

**Keywords:** Mathematical Modeling; Geogebra; Trigonometric functions.

## **Introdução**

Este estudo trata do uso da Modelagem Matemática no ensino de funções trigonométricas. Desenvolvemos uma pesquisa junto a uma escola básica de Castanhal, motivadas pelo resultado de pesquisas nacionais e internacionais, que relatam uma realidade em que a Matemática ainda é tida, para muitos alunos, como uma ciência de difícil aprendizado e desconexa da realidade dos mesmos. Uma pesquisa realizada pelo Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa) no ano de 2012, constatou em sua avaliação a difícil realidade da educação brasileira, em que 89% dos alunos saem do ensino médio sem saber o básico em Matemática. Possivelmente esses resultados não foram produzidos apenas no ensino médio, pois o conhecimento na disciplina é sequencial.

Resultados como esses evidenciam a necessidade de um espaço maior no ensino, para atividades em que os alunos possam investigar as soluções disponíveis, não aceitando a Matemática como conteúdo pronto e sem alterações. Dentre os conteúdos matemáticos estudados no ensino médio está o estudo sobre as funções trigonométricas, para a compreensão de vários fenômenos naturais periódicos em áreas como: medicina, economia, astronomia, física, engenharia, geociências, dentre outras.

Dentre algumas estratégias de ensino destacamos a Modelagem Matemática, que atende as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's, sobre as condições que o ensino precisa para ser eficaz. A Modelagem Matemática pode estar presente no cotidiano da sala de aula, através de atividades elaboradas com os alunos para o ensino de qualquer conteúdo desejado, proporcionando momentos significativos de aprendizagem.

Para Barbosa (2001, p.06) a Modelagem Matemática “propicia um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade”. Desse modo é possível alterar/discutir a realidade conhecida pelo aluno, o que permite uma condução para reformulações e tomada de decisão.

Acreditamos que a Modelagem Matemática é capaz de oferecer condições de manter a atenção do aluno durante o processo de aprendizagem,

contextualizando o conteúdo e quando associada ao uso do software Geogebra os resultados positivos podem ser potencializados. No entanto, queremos saber: *Como o uso do Geogebra no processo de Modelagem Matemática pode otimizar as aulas sobre funções trigonométricas no ensino médio?*

A intenção de usar a Modelagem Matemática para o ensino de funções trigonométricas no ensino médio surgiu após reflexão sobre a forma tradicional em excesso que os conteúdos de trigonometria, em especial as funções trigonométricas continuam a ser repassados, produzindo nos alunos a ideia de que o conhecimento matemático é algo estático.

Desde o seu surgimento a trigonometria esteve presente na resolução de problemas, considerados, até aquele momento, impossíveis por muitos estudiosos da época, tendo início na astronomia foi a chave para muitas descobertas conhecidas até os dias atuais, no entanto o ensino tradicional não desperta nos alunos o senso investigativo necessário para buscar novas soluções e assimilar o conteúdo de maneira adequada. Desse modo, objetivamos com esta pesquisa *analisar como o uso do Geogebra no processo de Modelagem Matemática pode otimizar as aulas sobre funções trigonométricas no ensino médio.*

Para alcançar esse objetivo, realizamos uma pesquisa de campo, de caráter qualitativo, onde os dados coletados foram produzidos a partir de aplicação de questionários e uma atividade de Modelagem Matemática intitulada *modelando o movimento do boneco trapezista*, realizada com alunos de uma turma de segundo ano do ensino médio de uma escola estadual, do município de Castanhal. Os registros, respostas e anotações em campo constituem os dados da pesquisa analisados com vistas a responder à questão de pesquisa.

O texto em questão está estruturado em cinco sessões. A primeira sessão trata sobre a Trigonometria, seu ensino e aprendizagem; a segunda sessão discute questões sobre Modelagem Matemática, GeoGebra e a Sala de Aula. Os procedimentos metodológicos são abordados na terceira sessão, seguida da sessão intitulada *Modelando o movimento do boneco trapezista* constituída de descrição e discussão dos resultados e finalizando com considerações sobre este estudo.

### **Trigonometria: Ensino e Aprendizagem**

A trigonometria constitui-se então, como o ramo da Matemática responsável pelo estudo das relações existentes entre os lados e os ângulos de um triângulo, desenvolvendo, a partir dessas relações, estudos sobre o círculo trigonométrico e o comportamento gráfico das funções trigonométricas.

Apesar da grande contribuição do conhecimento trigonométrico, o conteúdo não é bem aceito por alunos do ensino básico, pois sua abordagem, em geral, ocorre de forma complexa, diferente do conteúdo introdutório visto no ensino fundamental maior. Lindegger (2000) relata que, ao abordar a trigonometria no ensino médio, é possível notar que os alunos não se envolvem e demonstram um nível elevado de rejeição ao conteúdo, que consideram como algo muito complexo, criando uma visão negativa em relação à trigonometria.

Esse nível de rejeição, demonstrado por parte dos alunos, pode estar relacionado à falta de compreensão dos conceitos trigonométricos básicos, dado os erros de notação e de conceitos, observados nas representações matemáticas realizadas por alunos do ensino médio e até mesmo iniciantes do ensino superior (BORTOLI, 2012).

Para Amaral (2002), a rejeição, em relação à trigonometria, pode estar centrada no fato de que entre os conteúdos matemáticos presentes no ensino médio, a trigonometria é um dos de mais difícil compreensão por parte dos alunos. Isto é dado devido à grande abstração dos conceitos trigonométricos e a forma transmissiva como é ensinada, sem permitir que o aluno se envolva na construção dos conceitos apresentados.

O ensino de trigonometria é atualmente marcado, em grande parte das escolas, por aulas teóricas e fórmulas abstratas, que não possuem significado para o aluno. A excessiva abordagem algébrica dada a trigonometria e a manipulação de “muitas” fórmulas existentes no conteúdo tornam a aprendizagem cansativa para os alunos, pois na visão deles, são apenas mais fórmulas para memorizar (PINHEIRO, 2008).

Em alusão ao ensino de Matemática, os PCN's do ensino médio, dentre outras orientações necessárias a esse nível de ensino, relatam que:

Cabe a matemática no Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Aprender matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e a aquisição do conhecimento deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar Matemático (BRASIL, 1999, p. 252).

Assim, é preciso conduzir o aluno a interagir com o conhecimento de modo que o processo de construção do conhecimento seja significativo, levando-o a reconhecer a Matemática como um conhecimento historicamente construído por necessidade humana, estando presente nas situações reais e não somente na teoria apresentada, em grande maioria, sem contexto nas escolas.

Em relação ao ensino de trigonometria, segundo os relatos dos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares:

Tradicionalmente a Trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. (BRASIL, 2002, p.121-122).

Os PCN's possuem mais de uma década de existência, ou seja, não é uma discussão tão recente, pois já se discutia sobre situação semelhante a que presenciamos nos dias atuais em inúmeras escolas, onde o ensino continua a ser demasiadamente tradicional, utilizando apenas quadro e pincel, sem contextualização e não envolvimento dos alunos.

O ensino de Matemática nesta forma excessivamente tradicional, por si só, não oferece as condições necessárias para proporcionar momentos de aprendizagem significativos para os alunos. Principalmente na abordagem do conteúdo trigonométrico por se tratar de um conteúdo com um nível mais elevado de complexidade. Desta forma, é preciso apresentar ao aluno abordagens mais próximas à realidade ou mais práticas, dinâmicas, significativas e contextualizadas.

Abordar o conhecimento matemático, através de contextos, integra e relaciona os conteúdos a outras áreas de conhecimento, conduzindo o aluno, a desenvolver competências e habilidade essencialmente formadoras, à medida que estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações apropriando-se de linguagens específicas (BRASIL, 2002).

Conforme as orientações dos PCN's:

O que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e **para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos**. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas (BRASIL, 2002, p.121-122) (**grifo nosso**).

Dessa forma, trabalhar com aplicações trigonométricas promove aos alunos, a possibilidade de conhecer o conteúdo de maneira ampla, identificando a importância de suas aplicações durante os séculos para o desenvolvimento da sociedade, além de desenvolver versatilidade para compreender outros conteúdos relacionados.

Uma grande parte das aplicações trigonométricas encontradas no cotidiano foi desenvolvida através do conhecimento sobre as funções trigonométricas seno e cosseno. Próprias para descrever fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais o universo possui em grande número: o movimento dos planetas, o som, o cálculo da pressão arterial, a corrente elétrica alternada, os batimentos cardíacos, são exemplos clássicos desses fenômenos. Perante suas contribuições em aplicações no cotidiano da sociedade, tornou-se indispensável compreendê-las efetivamente.

Em várias áreas de conhecimento existem fenômenos de movimentos periódicos que podem ser estudados e descritos por funções trigonométricas. Segundo Soares Júnior (2017, p. 35):

Com aplicações práticas, essas funções podem ser vistas na Geometria Analítica, quando se estuda o coeficiente angular de uma reta, além disso, aparecem no estudo dos números complexos, quando se estuda a representação de um número complexo na forma polar ou forma trigonométrica. Podem aparecer também em conceitos avançados como física ondulatória, quando se fala de comprimento de onda, período, frequência, velocidade, som, entre outros.

As suas aplicações também podem ser encontradas na medicina em estudos sobre a pressão arterial de um paciente, na física ao modelar os movimentos de pêndulos e molas, no movimento do mar ao estimar a altura das ondas, dentre outros dos muitos exemplos existentes, pois todo fenômeno que possua um

comportamento periódico pode ser estudado através de funções trigonométricas, seno e cosseno especialmente.

As aulas sobre funções trigonométricas são ministradas, em sua maioria, utilizando somente os recursos de quadro branco e pincel. Dessa forma, ofertando ao aluno uma visão estática dos gráficos e comportamentos dessas funções, privando-os do contato com as inúmeras aplicações deste conhecimento. Visto que isso vem suprimindo dos alunos a oportunidade de comparar, analisar, argumentar e levantar hipóteses sobre as funções trigonométricas e suas aplicações.

Ao trabalhar com este conteúdo, é necessário garantir que o aluno tenha a oportunidade de manipular os gráficos conhecendo as características de cada função, seus parâmetros e através das aplicações reconheça o dado conhecimento no cotidiano. Para alcançar esses objetivos, apenas os recursos tradicionais não são suficientes, mas será necessário fazer uso de outras tendências educacionais como: Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação.

Com o auxílio da Modelagem Matemática e das Tecnologias de Informação, em especial os softwares educacionais como o GeoGebra, é possível modelar os dados de fenômenos periódicos. O GeoGebra transforma em gráficos e figuras manipuláveis os cálculos realizados durante o processo de modelar os fenômenos estudados, dando ao aluno a oportunidade de manipular os parâmetros adicionados no GeoGebra.

Assim, é possível a verificação da mudança realizada nas características de cada valor distinto inserido, conduzindo os alunos, através da obtenção do modelo e da visualização dos gráficos, a levantar questionamentos, comparações e hipóteses, estabelecendo conexões e analogias sobre as características das funções trigonométricas.

Essas habilidades sequenciadas e bem definidas nas ações dos estudantes sob a orientação dos professores proporcionam ao aluno condições favoráveis ao aprendizado do conhecimento trigonométrico, em especial das funções trigonométricas.

### **Modelagem Matemática, Geogebra e a Sala de Aula**

A Modelagem Matemática adentrou as salas de aula transformando o comportamento dos sujeitos perante o conhecimento e seu aprendizado. O espalho escolar é convidado através de “atividades com modelagem a se tornar um ambiente associado à problematização e investigação” (BARBOSA, 2004, p.75).

No primeiro momento, a comunidade escolar é convidada a problematizar, referindo-se ao ato de observar atentamente o objeto de estudo. Para assim, criar questionamentos e problemas que possam contribuir com o processo de aprendizagem, iniciado nesta etapa da atividade, a fim de alimentar o segundo momento marcado pela investigação.

Ao investigar o objeto de estudo os sujeitos são conduzidos a buscar, selecionar, organizar e manipular as informações obtidas no dado processo (BARBOSA, 2004). Ao finalizar a atividade os alunos são capazes de formalizar uma nova opinião, com mais criticidade, sobre o objeto que foi estudado na atividade com Modelagem Matemática.

Podemos ter como exemplo, uma situação em que um professor solicita aos alunos, uma pesquisa sobre os impactos gerados por uma reforma da previdência social, no planejamento pessoal de quem já contribuía com a previdência em planos particulares. Para realizar tal atividade, os alunos teriam que conhecer mais sobre a previdência social, para então refletir sobre o mesmo e criar questionamentos que os auxiliem na investigação.

Após isso, os alunos teriam que buscar informações sobre a forma que são efetuados os cálculos das aposentadorias, a partir dos planos oferecidos atualmente e as mudanças que a reforma causaria nesses cálculos, para então organizar os dados e abordá-los matematicamente para verificar a diferença gerada pela reforma em valores concretos para os contribuintes, em seguida os alunos avaliariam os resultados e refletiriam sobre o impacto social causado pela reforma da previdência.

Nesse exemplo de atividade, o professor atua como orientador do processo de Modelagem Matemática, e os alunos são orientados a criar seus próprios questionamentos e reflexões sobre o tema proposto, a fim de que as indagações

levantadas oferecessem suporte para solucionar a atividade proposta inicialmente pelo professor.

A Modelagem Matemática na educação “é um grande ‘guarda-chuva’, onde cabe quase tudo” (BARBOSA, 2004, p.73). Os temas propostos por professores e alunos em sala de aula surgem de vários campos de conhecimentos diferentes. Dessa forma é possível modelar situações climáticas de determinada região, assim como criações de animais como peixes em viveiros ou o comportamento das ondas do mar.

Pode-se também utilizar muitos outros comportamentos presentes nas ciências médicas, na física, na química, nas engenharias, na astronomia, etc., que podem ser modelados em sala de aula. Consequentemente convidando os alunos a tratar e refletir sobre esses fenômenos a partir da linguagem Matemática, o qual foi utilizado para investigá-los por meio da Modelagem Matemática. Essa condução favorece aos alunos uma nova formação e melhora a percepção dos mesmos sobre a disciplina de Matemática ao mesmo tempo em que os tornam críticos sobre os temas sociais apresentados e/ou discutidos.

A comunidade de Educação Matemática nas últimas cinco décadas demonstra sua intensa preocupação em relação à forma que o conhecimento está sendo transmitido, em resposta a essa inquietação surgiram debates e pesquisas, voltadas a maneiras de melhor ensinar o conhecimento matemático, em grupos de estudos existentes dentro de programas de mestrado e doutorado de universidades em geral. A partir desses estudos algumas tendências educacionais ganharam destaque, dentre elas a Modelagem Matemática, que busca, através da investigação de fenômenos da natureza, aplicar o conhecimento matemático criando modelos para “definir” tais fenômenos, conduzindo o aluno, durante o processo de modelagem, para perceber a Matemática como parte do cotidiano.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 12):

Uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Nesse sentido, relações entre a realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os

procedimentos estão ancorados) servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados. A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação Matemática, um modelo matemático.

Após definir o modelo matemático, é o momento de confrontá-lo com a realidade e analisar se o modelo encontrado realmente se aproxima da realidade observada. Através dessa reflexão é possível complementar, aperfeiçoar e validar, ou não, o modelo.

É nesse momento que o uso de outras propostas, ou tendências, educacionais como o uso das tecnologias se fazem necessárias, para “tentar expandir a investigação em sala de aula em direção a temas mais gerais, buscando integrar a experimentação com tecnologia ao trabalho de modelagem” (BORBA E PENTEADO, 2001, p. 39). Alguns autores como Malheiros (2004) e Araújo (2002), discorrem sobre a importância da aliança entre as Tecnologias de Informação - TICs e a Modelagem Matemática. Para Malheiros (2004, p. 53):

A Modelagem, muitas vezes, é associada a outras estratégias pedagógicas, como as TIC, por exemplo, com o intuito de tentar resolver problemas que envolvem a investigação e a experimentação-com-tecnologia, que são muito valorizados e discutidos na Educação Matemática.

A associação entre Modelagem Matemática e as Tecnologias de Informação, se faz necessária a partir da observação, quando ao iniciar uma atividade de Modelagem Matemática, efetuar cálculos extensos e cansativos sem o auxílio de calculadoras científicas ou softwares para visualizar figuras geométricas e gráficos, representa desperdiçar tempo e excelência nos resultados que poderiam ser alcançados

No entanto, o bom uso dos computadores durante o processo de Modelagem Matemática depende da escolha do software adequado. Neste estudo, optamos pelo uso do software GeoGebra, por ser um software gratuito, que disponibiliza a opção de ser usado na plataforma web e por possuir uma linguagem de programação acessível aos alunos.

Todas essas características facilitam a adaptação dos alunos ao lidarem com o GeoGebra durante as atividades de Modelagem Matemática. Nesse processo,

realizado para obter um modelo matemático, o software se faz presente para fornecer o recurso visual sobre o tratamento matemático que os fenômenos estudados receberam, portanto, o software precisa possuir uma linguagem acessível aos alunos.

A relação harmoniosa entre Modelagem Matemática e GeoGebra, se estabelece durante a obtenção do modelo matemático. O GeoGebra atua transformando, em gráficos e figuras manipuláveis, os cálculos realizados durante o processo de modelagem dos fenômenos, dando ao aluno a oportunidade de manipular os parâmetros adicionados no software, verificando instantaneamente as mudanças realizadas nas características da representação gráfica do fenômeno, a cada valor distinto inserido no GeoGebra.

Através da Modelagem Matemática, se realiza a escolha do fenômeno, as pesquisas exploratórias e os questionamentos sobre o fenômeno escolhido. O GeoGebra, complementa as atividades fornecendo aos alunos o fator visual sobre o comportamento matemático do fenômeno pesquisado. Conseqüentemente, isso facilita a assimilação das características do fenômeno e a associação do mesmo com a realidade, fornecendo subsídios para que o aluno possa analisar corretamente, se o modelo matemático pode ou não ser validado.

### **Procedimentos Metodológicos**

O presente estudo caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, de natureza aplicada, com procedimentos referentes a uma pesquisa-ação dentro da pesquisa de campo utilizadas para relatar e caracterizar o campo da pesquisa, os sujeitos e os procedimentos, isto é, o próprio processo de pesquisa. Dessa forma, a pesquisa no modo qualitativo viabiliza ao pesquisador um olhar mais amplo e profundo sobre o fenômeno pesquisado, como por exemplo: o ensino das funções trigonométricas no ensino médio, objeto de estudo deste trabalho.

Quanto aos procedimentos adotados, realizou-se uma pesquisa-ação dentro da pesquisa de campo. Para Fonseca (2002) a pesquisa de campo caracteriza-se por investigações realizadas em que, além da pesquisa bibliográfica, se realiza coleta de dados junto aos sujeitos da pesquisa. Em relação a pesquisa-ação o mesmo autor, Fonseca (2002, p. 34), afirma que:

A pesquisa-ação pressupõe uma participação planejada do pesquisador na situação problemática a ser investigada. O processo de pesquisa recorre a uma metodologia sistemática, no sentido de transformar as realidades observadas, a partir da sua compreensão, conhecimento e compromisso para a ação dos elementos envolvidos na pesquisa.

Dessa maneira, a pesquisa-ação propõe uma participação planejada, na qual em um primeiro momento observa-se a situação problemática e os sujeitos envolvidos para planejar a melhor abordagem disponível para transformar a realidade observada pelo pesquisador.

Todos os procedimentos referentes à intervenção e produção de dados relatados nesse estudo foram realizados na escola em uma escola da rede estadual de ensino do estado do Pará, localizada na cidade de Castanhal, na qual atuamos sob a observação do professor titular da turma. Os sujeitos da pesquisa foram 26 (vinte e seis) adolescentes, devidamente matriculados como alunos de 01(uma) turma de 2º ano do ensino médio da referida escola, todos inseridos na faixa etária de 15 a 17 anos de idade.

A atividade, intitulada “*Modelando o movimento do boneco trapezista*”, solicitava aos alunos manipularem o boneco trapezista, objeto cultural. Este boneco é um brinquedo tradicional na região paraense confeccionado tipicamente em miriti, uma madeira específica da região norte, e vendido nas feiras populares do estado do Pará. No entanto para esta atividade, reproduzimos o boneco de miriti utilizando outro tipo de madeira, pois tivemos dificuldade de encontrá-lo fora do período do Círio de Nazaré, em Belém do Pará. A atividade com o boneco buscava observar o movimento feito pelo corpo do boneco e as características desse movimento.

Após o momento de observação sobre o funcionamento do boneco trapezista, os alunos foram orientados a coletar os dados necessários e modelar uma função cossenoide que fornecesse a quantidade de giros que o boneco seria capaz de dar em cada tempo fornecido.

Os procedimentos da pesquisa e produção de dados foram realizados nas salas de aula e no laboratório de informática durante as aulas de matemática. E os dados produzidos em campo para a pesquisa, portanto, foram constituídos a partir dos registros dos alunos, das anotações em diário de campo, das respostas dos

alunos aos questionários aplicados, e as discussões que emergiram desses dados foram interpretadas a partir do objetivo da pesquisa.

### **Modelando o movimento do boneco trapezista: Descrição e discussão**

Após diálogo com os estudantes sobre o tema da atividade com explanação sobre o boneco trapezista e sua importância cultural na região, incluindo discussão de que, o mesmo, é normalmente confeccionado em miriti, uma madeira popular na região norte do Brasil, sendo comercializado em feiras populares paraenses, em especial durante a temporada do Círio de Nazaré, que constitui uma manifestação religiosa cristã em devoção a Nossa Senhora de Nazaré que ocorre em Belém do Pará, que chega a reunir em romaria cerca de dois milhões de pessoas, nas ruas da capital paraense.

O boneco trapezista é um entre muitos outros bonecos populares, dos que são vendidos em Belém no período do Círio de Nazaré, sendo a confecção desse boneco uma tradição familiar e comercial muito forte em cidades paraenses, como Abaetetuba localizada na região nordeste do estado do Pará.

O boneco trapezista é composto por uma estrutura com duas hastes que suportam e movimentam o trapezista e ao pressionar essas hastes na parte de baixo, gera ao trapezista um movimento circular, levando-o a girar em torno do eixo ao qual ele está preso, na parte superior das hastes.

A altura máxima alcançada pelo corpo do trapezista, é definida no momento em que o corpo do boneco completa o giro. A altura mínima é obtida a partir da medição de quando o trapezista está inerte e para a definição das alturas máximas e mínimas é desconsiderado a extensão das pernas do trapezista, utilizando como base para medição o tronco do boneco, e a velocidade dos giros realizados pelo trapezista depende da habilidade de quem o manipula.

Ao final desse primeiro diálogo, contendo as explicações necessárias para a realização da atividade, foi fornecido aos estudantes dois exemplares do boneco (Figura 1) para que eles movimentassem e aprendessem como funciona o movimento feito pelo trapezista, adquirindo habilidade para o momento da coleta dos dados necessários, dados estes, utilizados para obtenção do modelo matemático.

Figura 1: boneco Trapezista (e com régua fixada)



Fonte: Das autoras

Inicialmente os estudantes coletaram as alturas máximas e mínimas atingidas pelo corpo do trapezista, para isso duas régua foram devidamente fixadas nas hastes que suportam o trapezista, garantindo a coleta adequada das alturas. Para posicionar as régua foi efetuada uma medição do comprimento total do corpo do trapezista, em seguida posicionou-se a primeira parte da régua, com o “zero da régua” exatamente ao meio do corpo do trapezista. Dessa forma os números que estivessem posicionados na parte inferior ao zero seriam negativos e os números na parte superior ao zero seriam os positivos.

No momento seguinte os alunos, com o auxílio de um cronômetro presente nos aparelhos celulares dos mesmos, verificaram quantos giros era possível realizar em 60 (sessenta) segundos; essa quantidade variou bastante de uma dupla para outra, de acordo com a habilidade de cada aluno responsável pelo movimento.

Após tomar nota de todos os dados necessários, os alunos decidiram utilizar senoide para essa atividade e com esses detalhes decididos os alunos passaram a calcular os valores numéricos de cada parâmetro da senoide.

Registro 1: Dados coletados com o boneco trapezista

Maximo: 14cm  
Minimo: -14cm  
Periodo:  $\frac{60}{62} \rightarrow \text{Tempo} = \Delta 0,9675$   
 $62 \rightarrow \text{Quat de giros}$

Fonte: Pesquisa de Campo, 2017.

Para definir os valores dos parâmetros “A” e ”B”, os alunos utilizaram as alturas máximas e mínimas para formar e solucionar um pequeno sistema de equações (Registro 2), e posteriormente com o valor do parâmetro “A”, substituir esse valor em uma das equações no mesmo sistema determinando o valor de “B”.

#### Registro 2: Parâmetros “A” e “B”

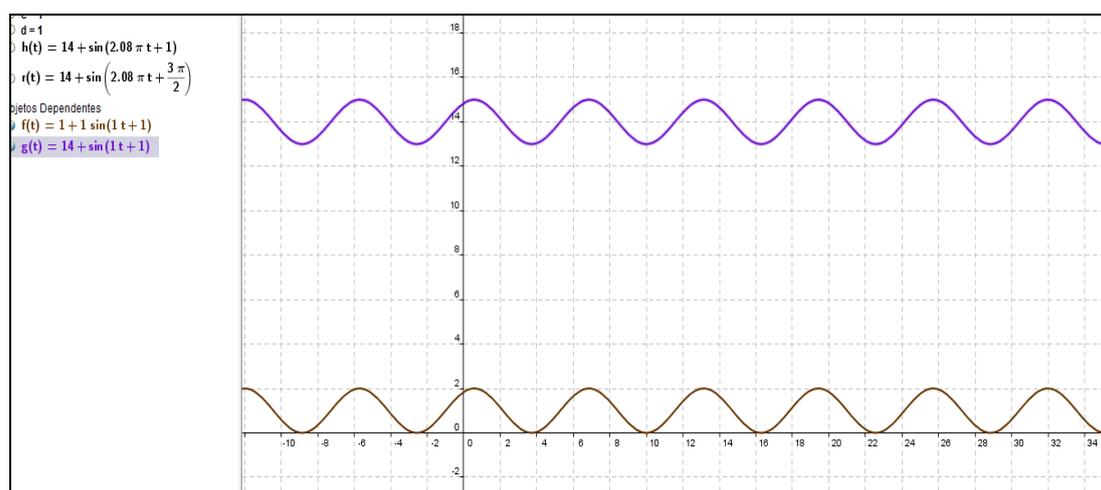
$$\begin{array}{r} A + B = 14 \\ A - B = -14 \\ \hline 2A = 0 \\ \boxed{A = 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A + B = 14 \\ 0 + B = 14 \\ \boxed{B = 14} \end{array}$$

Fonte: Pesquisa de Campo, 2017.

De posse desses valores os alunos adicionarem novamente no GeoGebra a equação padrão da senoide,  $f(x) = A + B \cdot \text{sen}(C \cdot x + D)$ , em seguida foi adicionado somente o parâmetro ”B” devido ao valor do parâmetro “A” ser nulo.

Gráfico 1: Gráfico Comportamento parâmetro B



Fonte: Pesquisa de Campo, 2017.

As curvas em cor marrom representam a equação genérica da senoide, e as curvas em lilás representam a equação com o valor do parâmetro “B” adicionado. A nulidade do valor numérico do parâmetro “A”, nessa atividade possibilitou, aos

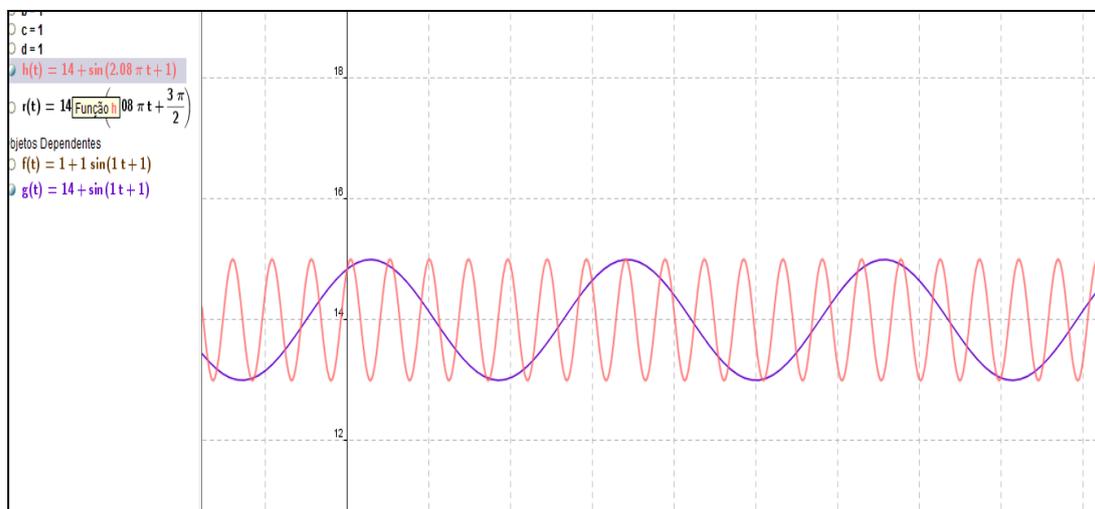
estudantes observarem com mais clareza o deslocamento das curvas, realizado no gráfico pelo valor de “B”.

A nulidade do parâmetro “A” gerou comentários mais específicos dos alunos em relação ao comportamento gráfico alterado pelo parâmetro “B”. Ao serem questionados sobre que alteração o parâmetro causou, eles já não mais responderam de maneira vaga, foram mais específicos e confiantes.

Para obter o valor do parâmetro “C”, os alunos dividiram primeiro a quantidade de giros realizados, por eles no trapezista pelo tempo de 60 (sessenta) segundos, que foi o tempo utilizado por eles para a coleta dos dados. Com o resultado dessa divisão em mãos, os alunos em posse do conhecimento que o período de uma senoide é definido por  $P = \frac{2\pi}{|c|}$ , realizaram as devidas substituições obtendo ao final o valor numérico do parâmetro  $C = 2,08\pi$ .

Ao adicionarem a equação da senoide no GeoGebra, os alunos observaram o seguinte comportamento gráfico, em comparação com a última alteração gerada pelos primeiros parâmetros obtidos, como mostra a Gráfico 2.

Gráfico 2: Gráfico Comportamento parâmetro C



Fonte: Pesquisa de Campo, 2017.

As curvas em lilás representam a equação da senoide com as substituições dos valores numéricos de “A” e ”B”, definidos anteriormente, e a curva em vermelho contém as substituições dos parâmetros “A”, ”B” e ”C”, estabelecidos até o dado momento do experimento.

Ao analisar a alteração gráfica gerada pelo parâmetro “C”, os alunos questionaram sobre o motivo, de nesse experimento, as curvas possuírem uma “distância” menor uma das outras em comparação com os outros experimentos, ou seja, eles questionaram o motivo para que nesse experimento a frequência dessas curvas gráficas tenha sido menor em comparação as atividades anteriores. Sendo devidamente esclarecido que isso ocorreu devido ao período determinado por eles no início da atividade.

Na sequência determinou-se o valor do parâmetro “D”, o quarto e último parâmetro a ser definido. Para isso, os alunos escolheram um par de pontos (tempo, altura) para efetuar a substituição juntamente com os parâmetros definidos anteriormente na equação da senoide (Registro 3), realizando as manipulações algébricas necessárias para obter o valor numérico de “D”.

Registro 3: valor numérico do parâmetro “D” na atividade

$$f(t) = 14 \operatorname{sen}(2,08\pi \cdot T + \Delta)$$

Usando  $(0, -14)$  que é conhecido, temos:

$$-14 = 14 \operatorname{sen}(2,08\pi \cdot T + \Delta) \div 14$$

$$-1 = \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Fonte: Pesquisa de Campo, 2017.

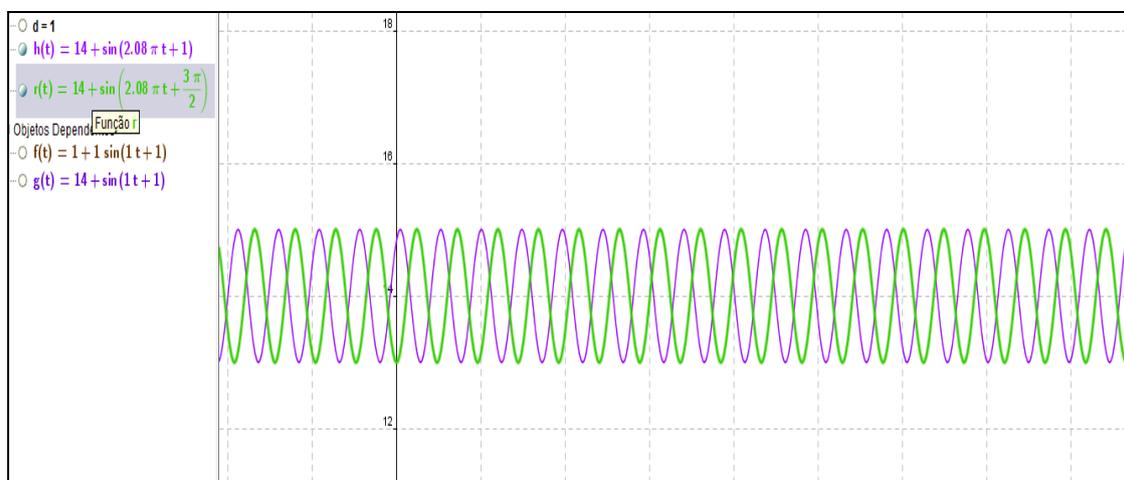
Com os valores de todos os parâmetros definidos, os alunos obtiveram vários modelos matemáticos, devido a diferença entre os períodos obtidos por eles na coleta de dados, com os dados conhecidos os alunos obtiveram o modelo, equação 1, no qual ao inserir o valor de “t” como o tempo, ficou determinado como “f (t)” a quantidade aproximada de giros capazes de serem realizados no tempo estipulado.

$$f(t) = 14 \operatorname{Sen}\left(2,08\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Eq. 1

Ao substituir o último valor numérico da senoide no GeoGebra, foi observado o seguinte comportamento gráfico, Gráfico 3.

Gráfico 3: Modelo matemático para o movimento do boneco trapezista



Fonte: Pesquisa de Campo, 2017.

No qual a curva em cor verde representa o comportamento gráfico do modelo matemático que posto em comparação com a curva em cor roxa, que representa as substituições dos três primeiros parâmetros, é observável que o valor do parâmetro “D” causou um deslocamento horizontal nas curvas da senoide.

Ao final da atividade foi solicitado a cada dupla ou trio de alunos, que revisassem as atividades realizadas por eles observando os gráficos gerados no GeoGebra a cada parâmetro adicionado, e relatassem oralmente o deslocamento causado por cada parâmetro nos três casos. Apesar de não haver diferenças notáveis entre uma senoide e uma cossenoide, optou-se por trabalhar com as duas funções com a intenção de que os alunos buscassem conhecimentos sobre os arcos seno e cosseno para realizar as atividades. Durante a realização da sequência de atividades ficou nítido que se tem:

Com o apoio do GeoGebra, não somente mostrando gráficos prontos, mas mostrando aos alunos a relação entre o conteúdo estudado e o que pode ser feito no software, uma ferramenta completa que possibilita o ensino, não só de Trigonometria, mas de muitos outros saberes matemáticos (SOARES JUNIOR, 2017, p.41)

Esse procedimento tinha como objetivo gerar uma reflexão sobre o conhecimento adquirido por eles durante a sequência da Atividade de Modelagem Matemática. Com a realização dessa sequência, foi visível a surpresa por parte dos

alunos ao notarem situações como o caso de um boneco, serem abordadas dentro do conteúdo matemático de forma relativamente simples e compreensível.

As dificuldades apresentadas por eles, durante a realização da atividade, não estavam somente no conteúdo trigonométrico, eram oriundas das quatro operações básicas, álgebra, cálculo e simplificação de frações, dentre outros conteúdos do ensino fundamental.

Os alunos, em suas respostas foram categóricos ao afirmarem que visualizar as alterações gráficas no software GeoGebra, foi imprescindível para a aprendizagem do conteúdo trigonométrico abordado nas aulas. Conclusão reforçada, nas respostas destacadas, referente a essa questão.

*Ver os gráficos no programa fez toda a diferença, nunca que eu imaginaria que os parâmetros causam todas essas mudanças no gráfico só olhando os gráficos desenhados pelo professor. (Aluno A)*

*Facilitou sim, porque colocamos em prática tudo o que vimos nas aulas. (Aluno B)*

*Facilitou, ver os gráficos me fez entender o assunto, porque a aula passou a ter uma dinâmica melhor. Eu gostei. (Aluno C)*

Com a análise das respostas escritas e orais dos alunos, ficou evidenciado que utilizar o GeoGebra, possibilitando aos alunos observarem todas as alterações gráficas, facilitou a compreensão dos conteúdos e dinamizou as aulas, contribuindo para uma aprendizagem com significado.

Com referência ao uso da Modelagem Matemática durante as aulas, constatamos que os alunos ficaram muito surpresos ao lidarem com exemplos do cotidiano dentro da Matemática, através da Modelagem Matemática. As respostas dos mesmos, em sua maioria, foram positivas, nas quais afirmaram que o uso da Modelagem Matemática contribuiu para a aprendizagem do conteúdo, dinamizando as aulas e o processo de aprendizagem. Dentre as quais, destacamos:

*foi legal ver e entender que as coisas do cotidiano podem ser explicadas pela matemática. (Aluno D)*

*não sabia que situações como de um boneco como o trapezista podiam ser usados na matemática. (Aluno E)*

*foi diferente ver aqueles cálculos todos voltados pra situações que eu posso encontrar na rua ou em casa, fiquei surpreso com a atividade do boneco e gostei de não ter que só responder exercícios sobre o assunto. (Aluno F)*

Destacamos das falas dos alunos que com a Modelagem Matemática no ensino, “é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problemas por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse” (BIEMBENGUT; HEIN, 2007, p. 13). Além disso, a fuga do ensino tradicional, bem como a percepção dos alunos com relação as coisas que a Matemática pode explicar.

Entendemos a partir do retorno positivo dos alunos que com a Modelagem Matemática o ensino da Matemática é “dinâmico, mais vivo e, em consequência, mais significativo para o aluno e para o grupo. Contribui para tornar mais intensa, mais eficiente e mais eficaz a construção do conhecimento por parte de cada aluno” Burak (2004, p. 03), na medida em que os mesmos se mostraram motivados a partir do ambiente de aprendizagem que a Modelagem Matemática proporcionou.

### **Considerações Finais**

Com a realização dessa pesquisa, foi possível afirmar que, ministrar as aulas sobre funções trigonométricas com o auxílio da Modelagem Matemática e do software GeoGebra, foi incrivelmente benéfico para o processo de aprendizagem. Dinamizar as aulas garantiu um maior envolvimento dos alunos e resultados satisfatórios em suas aprendizagens.

De modo geral, durante a realização desta pesquisa um dos maiores ensinamentos adquiridos é que apesar das condições precárias que a maioria das escolas estaduais se encontra, é possível sim proporcionar aulas diferenciadas e envolventes tornando o conteúdo matemático mais acessível e com mais significados para os alunos.

E ao retomar o objetivo do estudo sobre analisar como o uso do Geogebra no processo de Modelagem Matemática pode otimizar o estudo de funções trigonométricas a partir do uso de um objeto cultural – boneco trapezista, no ensino médio. Entendemos que o mesmo foi alcançado, na medida em que o objeto cultural gerou uma motivação inicial intrigante sobre a matemática que poderia ser desenvolvida a partir de um boneco, bem como despertou nos alunos a percepção pela matemática das coisas, somado a isso os próprios alunos perceberem as características dos parâmetros do modelo matemático quando da utilização do Geogebra após organização e coleta dos dados com a manipulação do boneco

trapezista e nesse ponto reconhecemos que o software Geogebra foi capaz de otimizar as aulas de matemática sobre funções trigonométricas pela dinamização e interação com o objeto e o próprio software no processo de Modelagem Matemática.

Somado a isso destacamos que a Modelagem Matemática e GeoGebra são capazes de envolver os alunos na construção do próprio conhecimento gerando uma aprendizagem com significado e que os objetos matemáticos e não matemáticos interferem potencialmente na motivação e desenvolvimento da aprendizagem por meio da Modelagem Matemática.

### Referências

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

AMARAL, F. J. **Ensino da trigonometria via resolução de problemas, mediado por dinâmicas de grupo, analogias e recursos informáticos**. 2002. 129f. Dissertação (Mestrado em Educação Tecnológica) Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, CEFET, Belo Horizonte.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: Reunião Anual da ANPED. Caxambu. Rio de Janeiro: **Anais** Eletrônicos do ANPED, 2001.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como?** *Veritati*, n. 4, p. 73- 80, 2004.

BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 4ª ed. São Paulo: Contexto, 2007.

BORTOLI, G. **Um olhar histórico nas aulas de trigonometria**: Possibilidades de uma prática pedagógica investigativa. 2012. 149f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas). Centro Universitário Univates, Lajeado, RS.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2ª Ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.

BURAK, D. Modelagem Matemática e a sala de aula. In: **Anais I EPMEM-Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática**. Londrina, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio: Matemática**. Brasília: MEC, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação. **PCN + (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais)**. Brasília: MEC, 2002.

Boneco Trapezista: Trigonometria via Modelagem Matemática com o auxílio do Geogebra

BRASIL, Ministério da Educação. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília: MEC, 2006.

CÍRIO, **Círio de Nazaré**, 15 jun 2018, Disponível em: <http://ciriodenazare.com.br/site/cirio/> Acesso em: 15 jun 2018.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002.

LINDEGGER, L. R. M. et al. **Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo**: uma proposta a partir da manipulação de modelos. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP, 2000.

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em um ambiente de Modelagem**. 2004. 180 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro SP, 2004.

PINHEIRO, E. **O ensino de Trigonometria na educação básica a partir da visualização e interpretação geométrica do ciclo trigonométrico**. 2008. 87f. Dissertação (Mestrado Profissional Em Ensino De Ciências E Matemática) - Núcleo Universitário Coração Eucarístico Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2008.

SANTOS, A. **Didática sob a ótica do Pensamento Complexo**. Porto Alegre: Salina, 2004.

SILVA, R. S.; BARONE, D. A. C; BASSO, M. V. A. Modelagem Matemática e TICs: possibilidades para uma abordagem interdisciplinar de conceitos através da tecnologia informática. In: **IX CLIOA**, p. 1-12, 2015.

SOARES JÚNIOR, O. S. **Uma análise teórica sobre as possibilidades do uso do software computacional GeoGebra no ensino e aprendizagem de gráficos de funções trigonométricas**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso DME-Universidade Federal de Rondônia, 2017.

TÁBUA, **Tábua de Marés e Solunares**, 15 jun 2018, Disponível em: <http://www.tabuademares.com/br/para/belem>. Acesso em: 15 jun 2018.

## **Sobre as autoras**

### **Roberta Modesto Braga**

Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Pará (2003), Mestrado pelo Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (2009) e Doutorado pelo mesmo Programa (2015). Experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em Modelagem Matemática e Tecnologias. Líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem na Educação Matemática – GEMM e Coordenadora do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática - LEMM. Professora Adjunta da Faculdade de Matemática, Campus Castanhal da Universidade Federal do Pará. E-mail: robertabraga@ufpa.br

Orcid: <http://orcid.org/0000-0003-3747-5862>

**Amanda Maia Souza**

Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Pará, Campus Castanhal. Atua na rede municipal de ensino SEMED de Peixe-Boi/PA.

E-mail: mandamaia1202@gmail.com Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-9553-7913>

Recebido em: 16/03/2019

Aceito para publicação em: 08/08/2019