DAS IDEIAS INICIAIS SOBRE CONJUNTOS A TEORIA AXIOMÁTICA DE ZERMELO

Adriano Aparecido Soares da Rocha
Universidade Federal do Pará-UFPA
adrianoasr@ufpa.br

Pedro Franco de Sá
Universidade Estadual do Pará
pedro.franco.sa@gmail.com

RESUMO

Neste trabalho, veremos que a ideia de conjunto é muito antiga, para alguns tão antiga quanto a linguagem, mas os matemáticos a usavam apenas de forma intuitiva sem uma teoria geral, o primeiro a criar uma teoria geral e inovadora com a colaboração de alguns resultados de outros matemáticos foi Cantor, mas por sua Teoria não estar embasada logicamente, já que as ideias iniciais foram intuitivas a partir de ideias geométricas, está apresentou alguns paradoxos, que levou os matemáticos a criar uma nova teoria de conjuntos a partir de axiomas que sanassem estas contradições.

Palavras-chave: Teoria dos conjuntos. Hipótese do continuo. Paradoxos. Axioma da escolha.

1. Introdução

A Teoria dos conjuntos, hoje está subjacente em quase todos os ramos da matemática, seja em análise, em álgebra ou geometria. Mas nem sempre as coisas foram assim, cada um trabalhava com seu objeto de estudo, e durante muito tempo os matemáticos evitavam trabalhar com determinados conjuntos os conjuntos infinitos, Cantor ao estudar certas funções trigonométricas, começou a tralhar com certos conjuntos infinitos, seus primeiros resultados importantes o levaram a uma dedicação sobre o tema, sendo o grande responsável pela primeira teoria geral sobre os conjuntos. Com o decorrer do tempo os matemáticos viram a necessidade de teoria dos conjuntos axiomatizada para que paradoxos fossem evitados.

2. Fase intuitiva sobre conjuntos

A ideia de conjunto é a muito tempo conhecida pelo homem, segundo Macedo (2008, p.42) uma possível primeira utilização dessa ideia, remonta a 5000 anos, no cetro real do rei Menés. Segundo Boyer (1974, p.8) tal cetro encontra-se em um museu em Oxford, neste cetro há o registro através de marcações de 120000 prisioneiros e de 1422000 cabras. Isso revela uma ideia ainda que informal de conjunto. Para Dieudonné (1990, p. 147) "*A ideia de reunir objetos da mesma natureza numa coleção é sem dúvida tão antiga como a linguagem*".

Os matemáticos ao longo da história tinham que usar e referir os conjuntos de objetos que eles trabalhavam, assim como seus subconjuntos, usando vários nomes: lugares geométricos, classes, subgrupos, multiplicidade, conjunto de símbolos (DIEUDONNÉ, 1990, p. 147). Todavia não existia uma teoria de conjuntos que pudesse ser usada nos mais variados ramos da matemática como temos hoje. E por questões e debates filosóficos referente ao infinito e, com medo de que isso trouxesse controvérsias a matemática os matemáticos de Euclides a Cauchy evitavam em falar em conjuntos infinitos.

3. Desenvolvimento da Teoria de Cantor

A ideia que há muito tempo fascina o homem e que está intimamente relacionado ao estudo de conjuntos, é a ideia de infinito, segundo Pimentel (2010, p.17) " *O infinito já era tratado pelo filósofo grego Zenão de Eléia em 450 a. C. Aristóteles, em 350 a.C.*" Euclides enuncia que o "todo é maior que a parte"(DIEUDONNÉ, 1990, p. 147). Cantor ao estudar a ideia de infinito, prova que a afirmação de Euclides nem sempre é verdadeira, isso o motiva a estudar mais o tema, sendo o principal responsável pelo desenvolvimento de uma teoria dos conjuntos, hoje conhecida como teoria ingênua dos conjuntos. Cantor definiu conjunto como "*Um agrupamento num todo de objetos bem distintos da nossa intuição ou do nosso pensamento*" Dieudonné (1990, p. 235).

Para Pimentel (2010, p.18) o artigo de Cantor datado de 1874 é considerado como o início da teoria dos conjuntos. Neste artigo Cantor mostra que os números reais não são enumeráveis, ou seja, não há uma função bijetora entre os naturais e os reais, mostra ainda que há mais reais que naturais.

> Em 1878, Cantor demonstrou que é possível uma bijeção entre o intervalo real [0,1], um subconjunto do espaço ℝ, com a totalidade dos pontos de $\mathbb{R}^n$, sendo n finito. Mais precisamente, Cantor provou que é possível estabelecer uma correspondência bijetiva entre espaços de dimensões r e p, sendo r≠ p e, com isto, demonstrou que há a mesma quantidade de pontos tanto em $\mathbb{R}^r$ quanto em $\mathbb{R}^p$, com r≠ p. (GOMIDE, 2016, p. 340).

Ainda segundo Gomide (2016) Cantor ficou surpreso com tal resultado ao ponto de dizer que “Eu vejo, mas não acredito”, para Dieudonné (1990, p. 232) esse fato causou embaraço entre os matemáticos de sua época, pelo fato de as pessoas estarem convencidas desde os gregos sobre as diferenças existentes entre objetos matemáticos de dimensões distintas, alguns acharam que a geometria foi destruída, porém Dedekind conjecturou que este fato só é possível com bijeções descontinuas, e que é impossível encontrar uma bijeção continua entre espaços com dimensões distintas, pelo fato da dimensão de um espaço ser um invariante topológico no caso de bijeção continua. Com a argumentação de Dedekind, Cantor percebeu que o invariante que há entre espaços de dimensões distintos não é de caráter topológico, sendo o que se mantem entre espaços lineares distintos é a sua *potência* ou seu *número cardinal*.

A conjectura acima feita por Dedekind foi demostrada somente em 1911 por L.E.J. Brouwer, com ideias novas introduzidas por Poincaré e pelo próprio Brouwer Dieudonné(1990). Outra conjectura esta enunciada por Cantor em 1878, que gerou muita discussão e, que continua a intrigar o pensamento humano, é a hipótese do contínuo. (HC) que diz que que *todo conjunto infinito de números reais ou é enumerável ou tem a potência do contínuo* (KANAMORI, 1996, p.5). Ou seja, Cantor enunciou que Se A está contido em ℝ, então sua cardinalidade ou é $\aleph_0$ ou $\aleph_1$, sendo $\aleph_1=2^{\aleph_0}$, onde $\aleph_0$ é a cardinalidade dos naturais e $\aleph_1$ a cardinalidade dos reais.

O que mais intriga tal enunciado (HC) é que até hoje ele não foi demostrado nem refutado completamente, ainda que existam tentativas nesse sentido, mas que não são aceitas pela maioria dos matemáticos. A maior parte dos matemáticos aceitam o fato de tal conjectura ser independente dos outros axiomas de ZFC, tal fato foi consolidado por Paul Joseph Cohen (1934–2007) em 1963 (KANAMORI, 2008). Na realidade Cantor mostrou em 1884 apenas que qualquer conjunto fechado de Reais tem a cardinalidade de contínuo, este resultado decorre de seu estudo sobre conjuntos perfeitos, os quais foram definidos por ele, um conjunto perfeito é um subconjunto de $\mathbb{R}$, não vazio, fechado e sem pontos isolados (KANAMORI, 1996)

A experiência conceptual de Freiling, é uma argumentação interessante que usa ideias probabilísticas para negar a hipótese do contínuo (HC), para o leitor interessado poderá encontrar mais detalhes em Oliveira (2017). O que mais me intrigou é que, apesar de muitos não aceitarem suas ideias, há relato de matemático importante que apoia seus argumentos como podemos ver em Oliveira (2017, p.15)

> Mas no caso de Freiling a ousadia ultrapassa o que é subscrito pela maioria dos matemáticos profissionais, na medida em que inclui experiências mentais envolvendo resultados probabilísticos como um método legítimo de justificar proposições matemáticas. Freiling tem, todavia, alguns defensores entusiastas, como David Mumford (Medalha Fields em 1974), que atribui grande importância ao trabalho de Freiling, pois vê neste uma contribuição para a remodelação da teoria dos conjuntos como uma 'teoria estocástica dos conjuntos', como costuma dizer.

Segundo Kanamori (1996) Felix Haustor em 1908 publicou o artigo intitulado "Grundz¨uge einer Theorie der geordneten Mengen" (Fundamentos dos Conjuntos Ordenados), onde ele faz um estudo detalhado dos números transfinitos e neste artigo é enunciado a Hipótese Generalizada contínuo (HGC) "*Se X for um conjunto infinito e Y for o conjunto de todos os subconjuntos de X, então cada subconjunto Z de Y, ou tem a potência de Y, ou tem potência de um subconjunto de X.*"

A Teoria de Cantor por ser inovadora, sofreu ataques de matemáticos importantes como Kronecker, e o fato de não conseguir demonstrar a sua hipótese do continuo o levou a ter uma crise nervosa, o que lhe afastou por um tempo de seus estudos, mas ele continuou insistindo com o apoio principalmente de Dedekind, apoio este tanto pessoal quanto cientifico. Outro matemático que se rendeu a genialidade de Cantor foi Hilbert que em um congresso internacional na França em 1900 ao proferir uma palestra, apresenta 23 problemas em aberto para o desenvolvimento da matemática entre eles a (HC) de Cantor (OLIVEIRA, 2017).

4. Paradoxos

Para Gomide (2016) a teoria de cantor apresentou alguns paradoxos de cunho lógico por suas ideias iniciais terem sido tomadas da geometria, não tendo assim um formalismo lógico fundamentado.

> Desta forma, pode-se dizer que a teoria dos conjuntos, em seus fundamentos, foi elaborada a partir de uma abordagem analógico geométrica, e não lógica: os conjuntos são vistos como semelhantes

> a porções do espaço linear, isto é, são como intervalos abertos ou fechados de um espaço de n-dimensões, mas não como extensões de conceito. (GOMIDE, 2016, p. 341)

Segundo Pimentel (2010, p.18) Burali Forti descobriu um paradoxo (uma contradição) ao se considerar o conjunto formado por todos os ordinais. E Cantor em 1899 encontrou um paradoxo envolvendo o conjunto de todos os cardinais. Uma variante destes paradoxos encontrado em Dieudonné (1990, p. 237) é o seguinte: tomando a propriedade P (ser um objeto matemático). Existe um conjunto A, formado por todos os objetos matemáticos; há o caso particular em que A um elemento de si próprio. Por outro lado cada parte U , de A é um objeto matemático, assim um elemento de A; o conjunto $P(A)$ de todas as partes de A, é uma parte de A; o que contraria o teorema de cantor que garante que não há bijeção de $P(A)$ sobre uma parte de A, ou seja, o conjunto de todos os objetos matemáticos não contém todos esses objetos.

Outro paradoxo que levou os matemáticos a pensarem em uma outra maneira de definir a teoria dos conjuntos, foi o bem conhecido entre matemáticos, Paradoxo de Russel. Consiste no conjunto que possui a propriedade “se x é elemento de A, então x não é elemento de A”. Essa propriedade gera uma contradição, já que um elemento está em A, e não está simultaneamente. Uma vertente desse paradoxo é o paradoxo do Barbeiro, que diz que em uma certa cidade, mora um barbeiro, que barbeia somente os moradores daquela cidade, que não se barbeiam. Se supormos que ele se barbeia, então ele não se barbeia, já que ele barbeia apenas os moradores que não se barbeiam, por outro lado se ele não se barbeia, então se barbeia, uma vez que ele barbeia os moradores que não se barbeiam, sendo ele um morador da cidade podemos concluir tal fato.

5. Os axiomas de Zermelo

Os paradoxos que citamos, levaram os matemáticos e filósofos a pensarem em uma maneira diferente de introduzir a teoria dos conjuntos. O primeiro a ter êxito neste desafio, foi Zermelo em 1908. São os axiomas que exporemos abaixo que, segundo González (1991) que formam teoria axiomática de Zermelo e suas variantes:

Axioma de Extensionalidade: Dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles possuem os mesmos elementos.

(**Ex**) $\forall x \forall y \forall z \ ((z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$

Em linguagem usual temos: para todo conjunto x, y e z, se z pertence a x, se e somente z pertence a y, então x é igual a y.

Axioma de Pares: Para todos conjuntos x e y existe um conjunto cujos elementos são x e y.

(**Pa**) $\forall x \forall y \exists z \forall u \ (u \in z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y))$

Em linguagem usual temos: para todos conjuntos x,y e u, existe um conjunto z, tal que u pertence a z se, e somente se, u é igual a x ou u é igual a y.

Axioma de União: Para todo conjunto x, existe o conjunto de todos os conjuntos que pertencem a algum elemento de x.

(**Un**) $\forall x \exists y \forall u \ ((u \in y) \Leftrightarrow \exists h(u \in h \wedge h \in x))$

Em linguagem usual temos: para todo x e u, existe y, tal que u pertence a y se, e somente se, existe h tal que, u pertence a h e h pertence a x.

Denotamos a união de um conjunto x por $\cup\, x$

Axioma do Conjunto Potência:

(**Po**) $\forall x \exists y \forall u \ (u \in y \Leftrightarrow u \subseteq x)$

Em linguagem materna temos: que para todo conjunto x e u existe um conjunto y tal que, u pertence a y se, e somente se, u está contido em x.

Axioma de Infinito:

(**In**) $\exists x(\exists y(y \in x \wedge \forall z \, z \notin y) \wedge \forall z(z \in x \Rightarrow (z \cup \{z\}) \in x)$

Em linguagem materna temos: existe x e y tal que para todo z, y pertence a x e z não pertence a y; e para todo z pertencente a x, então z unido com {z} pertence a x.

Esquema de axiomas de Separação: Para cada fórmula φ em que y não ocorre livre a seguinte fórmula é um axioma:

(**Se**) $\forall x \exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$, onde y é definido $\{z \in x : \varphi(z)\}$.

Observe que não podemos ter y como variável livre em φ pois usamos tal variável para definir o conjunto $\{z \in x : \varphi(z)\}$. Para considerarmos y na definição do axioma e livre em φ , basta considerar φ como a formula $z \notin y$. Aplicando tal fórmula no axioma da separação temos:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \iff z \in x \wedge z \notin y)$$

Tomando como caso particular z= $\emptyset$ e $y = \{\emptyset\}$ tem-se que $z \in y$ verdadeiro e, assim teríamos que $(z \in y) \iff (z \notin y)$, o que é uma contradição.

Estes são os axiomas da teoria de Zermelo (Z^{-}). A teoria de Zermelo com escolha (ZC^{-}) é acrescentado o axioma abaixo:

Axioma da Escolha

(**AC**) $\forall x (\forall y \forall z (y \in z \wedge z \in x \wedge y \neq z \wedge \exists h\, h \in y \Rightarrow \neg \exists h (h \in y \wedge h \in z)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists e \forall z (z \in x \Rightarrow \exists!\, h (h \in z \wedge h \in e)$$

Em linguagem natural temos: para todo x, y e z; y pertence a z e z pertencente a x e y diferente de z e existe h pertencente a y, então não existe h pertencente a y e z. Então existe e tal que para todo x pertencente a x, então existe um único h pertencente a z e e.

Este axioma apenas ressalta a existência de um conjunto h satisfazendo as condições acima, mas não exibe uma maneira de achar tal conjunto está é uma crítica que atualmente não se anda tão em voga porque para Sanchis (2017, p. 2) "*De certa forma podemos dizer que essa discussão permanece até os dias de hoje, mas, a bem da verdade, a grande maioria dos matemáticos atuais não se preocupa com os fundamentos lógicos da própria matemática*".

Para Coniglio (2016, p. 49)*"O caráter altamente não construtivo deste axioma foi alvo de críticas por parte das escolas matemáticas construtivistas."* Mas por ser um axioma de onde se obtém muitos resultados importantes ele é de fundamental importância para a matemática atual, Coniglio (2016) cita alguns destes resultados, como o Teorema de Hahn-Banach de suma importância para a análise funcional, Teorema de Ideias primos para Álgebras de Boole, Teorema de Tychonoff, existência bases para espaços vetoriais, princípio da boa ordenação e lema de Zorn.

Por outro lado Banach TarsKi de 1924 por meio do axioma da escolha, declarou haver uma maneira de particionar uma bola no espaço tridimensional euclidiano em um número de partes finita e reorganizar estas partes através de movimentos rígidos de forma a obter duas bolas idênticas a inicial. Segundo

Kanamori (1996) Em 1963 Paul Cohen (1934-2007) mostrou que o axioma da escolha e a hipótese do continuo não podem ser refutadas nem demonstradas a partir dos axioma de ZF. *A origem do axioma da escolha ainda é fonte de investigações entre os estudiosos dos fundamentos da matemática* (PIMENTEL, 2010, p. 20).

Os axiomas expostos até o momento com exceção do da escolha, forma a teoria de Zermelo (Z^{-}). tal teoria, acrescida do teorema das fundações é a teoria de Zermelo bem fundada (Z) (González,1991). Segue abaixo o axioma de fundações.

Axioma de Fundações:

(**Fu**) $\forall x(x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)$

Em linguagem materna temos: para todo conjunto x não vazio, então existe um conjunto y que pertence a x e sendo disjunto com x. Este axioma aparece em um trabalho de Zermelo em 1930

Axioma da substituição: $\forall z \, \exists y \, \forall x \, (x \in y \rightarrow \exists w \, (w \in z \wedge \varphi(w) = x))$

teoria de Zermelo bem fundada (Z) mais o axioma da substituição forma a teoria de teoria de Zermelo Fraenkel (ZF), está acrescida do axioma da escolha, forma a teoria de Zermelo Fraenkel com escolha (ZFC), por fim (ZF^{-}), (ZFC^{-}), são as teorias correspondentes sem o axioma das fundações (GONZÁLEZ,1991).

6. A enumerabilidade dos reais

Apesar dos paradoxos na teoria de Cantor, não podemos tirar o mérito de Cantor pois ele foi o primeiro a verificar que existem diferentes tipos de infinitos, vamos expor um resultado importante obtido por ele, a inumerabilidade dos reais, o que exporemos aqui é apenas uma releitura de textos mais atuais, mas a ideia central ainda é a da diagonalização criada por ele.

já era sabido que existe um subconjunto A de $\mathbb{N}$ no qual pode ser definido uma função bijetora f, entre esses dois conjuntos e, isso está de acordo com a definição de conjunto infinito dada por Dedekind. *Que diz que um conjunto é infinito se está em relação biunívoca com a sua parte própria* (PIMENTEL, 2010 p. 22). Essa correspondência pode ser obtida mostrando que a função $f: \mathbb{N} \rightarrow A$, dada por $f(n) = 2n$ é bijetora, onde A é o conjunto dos naturais pares, Segundo Eves (2011,

p. 662) Galileu Galilei percebeu a correspondência biunívoca entre os conjunto A e $\mathbb{N}$ no final do século XVI.

No caso de um conjunto finito X , não podemos encontrar uma parte própria dele tal que, a parte própria tenha correspondência biunívoca. Cantor retomou a discussão de que o todo, nem sempre é maior que uma de suas partes como muitos pensavam na época, uma vez que o estudo de Galileu Galilei, ficou conhecido como um paradoxo, vale ressaltar que Bolzano também obteve resultados parecidos, pois mostrou que existe uma função bijetora entre os intervalos [0,1] e [0,2].

Da mesma forma podemos, fazer a correspondência dos naturais com os números impares usando a função g de $\mathbb{N}$ em B (Naturais ímpares) tal que $g(n) = 2n - 1$.Se continuarmos com tal raciocínio Temos que a função h de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$ definida por $h(n) = (1+n)/2$ se n ímpar e $h(n) = -n/2$ se n for par, tal função é bijetora, o que pode ser verificado sem muita dificuldade.

Assim fica claro que $\mathbb{N}$ e os $\mathbb{Z}$, tem a mesma cardinalidade, e os $\mathbb{Q}$? para tal usaremos o exemplo retirado de Pimentel (2010), considere a seguinte matriz infinita, na qual na primeira linha contém todas as frações positivas de denominador 1, na segunda as denominador 2 com a exceção de $1/2$, ..., na enésima todas as de denominador n, com a exceção de $1/n$, sendo que $a_{i1} = \frac{i}{1}$ ou $a_{ij} = \frac{j}{i}$ se, j diferente de 1

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc}
1 & & 2 & \rightarrow & 3 & & 4 & \rightarrow & 5 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
2 & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
3 & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
4 & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & \\
 & \swarrow & & & & & & & & \\
5 & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & \\
\downarrow & & & & & & & & &
\end{array} \right\|$$

Vamos agrupar todos os números racionais positivos em conjuntos em que $i + j = n$, observe que cada diagonal acima tem um n distinto. Unindo todos esses conjuntos, obtemos o seguinte conjunto: $\{1,\ 2,\ 2,\ 3,\ \frac{2}{2},\ 3,\ 4,\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ 4,\ 5,\ \frac{4}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{4}, 5, \ldots\}$. Vamos retirar os números repetidos desse conjunto, obtendo $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ 5,\ \frac{2}{4}, \ldots\}$. Como existem números racionais negativos colocamos ao lado de cada número o seu oposto obtendo:

$$\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 5, -5, \frac{2}{4}, -\frac{2}{4}, \ldots\}$$

E em seguida colocamos esse conjunto em relação biunívoca com o conjunto dos naturais

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	⋯
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	⋯
1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	⋯

Assim fica claro que a cardinalidade dos racionais é a mesma dos naturais.

Ainda em Pimentel (2010) encontramos uma construção para mostrar que a cardinalidade dos reais é maior do que as dos naturais. Considere o intervalo, $S = [0,1]$ dos reais, e considere o número r_i pertencente a S e, consideremos o conjunto de todos os r_i, tal que i é natural, já que cada real tem uma representação decimal representaremos este conjunto infinito de números reais através da tabela abaixo.

$$\begin{array}{lllllll} r_1 & = & 0, & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ r_2 & = & 0, & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ r_3 & = & 0, & x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \vdots & & & & & & \end{array}$$

Onde x_{ij} pertence ao conjunto $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, observe que este conjunto tem a cardinalidade dos naturais, consideremos agora o seguinte número

$$\alpha \ = \ 0, \ \alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \alpha_3 \ \ \cdots$$

Este número tem a seguinte propriedade: $x_{11} \neq \alpha_1,\ x_{22} \neq \alpha_2,\ x_{33} \neq \alpha_3$ e $x_{ii} \neq \alpha_i$.

Portanto este número α não figura entre todos os anteriores, assim a cardinalidade dos reais é maior do que a dos naturais, Essa foi uma das inovações de Cantor.

7. Considerações Finais

Podemos observar que a teoria dos conjuntos a qual a maior parte da matemática está fundamenta apresenta possíveis problemas, talvez eles sejam verdadeiros problemas, pode ser que não estamos percebendo as anomalias como Thomas kuhn afirma e , para passarmos a um outro paradigma é necessário surgir várias anomalias que não possamos justificar de nenhuma maneira, mas o ponto que levanto, ao relatarmos estas histórias aos nossos alunos ainda que de maneira superficial, uma coisa eles devem perceber, que a matemática, não é tão absoluta assim, não existe apenas uma forma de atacar um problema e, o que foi verdade em um determinado período, em outro já não é.

Ao ensinar uma matemática imutável, estamos contribuindo para ter um aluno que pense de verdade? ou estamos formando um mero decorador, de fórmulas, teoremas, algoritmos, não estou dizendo que a matemática atual tenha erros, mas também não direi que eles não existam, possíveis erros estão ai pairando no ar, mas isso é importante, se estes problemas e outros problemas não existissem, o que seria do pesquisador

8. Referências

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CONIGLIO, M. E.Teoria axiomática de conjuntos: uma introdução. Disponível on-line: http://www.cle.unicamp.br/prof/coniglio/CONJUN.pdf. Acessado em 27/10/2016

DIEUDONNÉ, Jean. **A Formação da matemática contemporânea**. Trad. J. H. Von Hafe Perez. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

EVES, Howard. **Introdução à História da matemática**. Campinas (SP): Editora da Unicamp, 2011.

GOMITE, Walter. A teoria cantoriana dos números transfinitos: sua relação com o pensamento analógico-geométrico. **Revista de Filosofia da PUCRS,** Porto Alegre, v. 61, p. 337-349, 2016

GONZALES, Carlos Gustavo. **Modelos da teoria de conjuntos de Zermelo.**1991. Dissertação (Mestrado)- Programa de Pós-Graduação em Filosofia. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1991, 51p

MACEDO, Rodrigo Sanchez. **Um estudo da teoria dos conjuntos no movimento da matemática moderna**. Dissertação (Mestrado)- Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008, 114 p

KANAMORI, Akihiro. The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen. Bulletin of Symbolic Logic, v.2, n.1, p.1-71. 1996

__________. Cohen and set Theory. Bulletin of Symbolic Logic, v.14, n.3, p.351-378. 2008

OLIVEIRA, Augusto J. Franco de. A herança de Cantor e a hipótese do contínuo. Disponível on-line: http://www.apm.pt/files/_PI_FrancoOliveira_4888b83d0af7b.pdf. Acessado em 06 de maio de 2017.

PIMENTEL, Ronaldo. **Platonismo e Naturalismo em Matemática: Os Axiomas da Teoria dos Conjuntos**. 118 f. Dissertação (Mestrado em Lógica e Filosofia da Ciência) –Pontifícia Universidade Federal de Minas Gerais – Belo Horizonte, 2010.

SANCHIS, Rémy. O axioma da escolha, o lema de Zorn e o teorema de Zermelo. Disponível on-line: http://www.mat.ufmg.br/~rsanchis/AxiomaEscolha.pdf. Acessado em 01 de maio de 2017.

.