ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p200-226

O descortinar da noção de situação em modelagem matemática escolar

The unveiling of the notion of situation in school mathematical modeling

El develamiento de la noción de situación en la modelación matemática escolar

Le dévoilement de la notion de situation dans la modélisation mathématique scolaire

Gleison de Jesus Marinho Sodré [1]
Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará (EA/UFPA)
Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas
https://orcid.org/0000-0002-3993-4236

Resumo

Este artigo aborda a problemática concernente à modelagem matemática reversa interpretada pelo tipo de tarefa que consiste em encontrar a situação com matemática que pode estar associada a um modelo matemático. Objetivou-se criar condições no sentido da teoria antropológica do didático que permita evidenciar essa problemática. Para isso, recorreu-se a recursos teórico-metodológicos da teoria antropológica, mais especificamente, a partir do ciclo investigativo de modelagem matemática para delimitação de uma trajetória possível de formação com alunos do ensino médio da escola básica. Os resultados encontrados, mediante as experimentações empíricas a partir de um problema em contexto da matemática financeira escolar, permitiram evidenciar o papel indispensável dos *habitus* como sistema de percepção durável e transponível mobilizado pelos alunos. Esse percurso investigativo tornou possível a delimitação ou o (re)conhecimento da situação com matemática associada ao tipo de problema considerado. Os resultados possibilitam responder, não exaustivamente, à problemática de interesse da teoria antropológica do didático, bem como estimulam futuras pesquisas sobre a modelagem matemática condicionada aos gêneros textuais.

Palavras-chave: Modelagem matemática reversa, Teoria antropológica do didático, *Habitus*, Situação com matemática.

Abstract

This article addresses the problem concerning reverse mathematical modeling interpreted by the type of task that consists of finding the situation with mathematics that can be associated with a mathematical model. The objective was to create conditions in the sense of the

[1] E-mail: profgleisoneaufpa@gmail.com

anthropological theory of the didactic that allow to highlight this problem. For this, theoretical-methodological resources of anthropological theory were used, more specifically, from the investigative cycle of mathematical modeling to delimit a possible trajectory of formation with high school students from basic school. The results found, through empirical experiments based on a problem in the context of school financial mathematics, made it possible to highlight the indispensable role of habitus as a durable and transposable perception system mobilized by students. This investigative path made it possible to delimit or (re)know the situation with mathematics associated with the type of problem considered. The results make it possible to respond, not exhaustively, to the problem of interest of the anthropological theory of the didactic, as well as stimulate future research on mathematical modeling conditioned to textual genres.

Keywords: Reverse mathematical modeling, Anthropological theory of the didactic, *Habitus*, Situation with mathematics.

Resumen

Este artículo aborda el problema del modelado matemático inverso interpretado por el tipo de tarea que consiste en encontrar la situación con las matemáticas que se puede asociar a un modelo matemático. El objetivo fue crear condiciones en el sentido de la teoría antropológica de la didáctica que permitan evidenciar este problema. Para ello, se utilizaron recursos teórico-metodológicos de la teoría antropológica, más específicamente, del ciclo investigativo de modelación matemática para delimitar una posible trayectoria de formación con estudiantes de bachillerato desde la escuela básica. Los resultados encontrados, a través de experimentos empíricos basados en un problema en el contexto de las matemáticas financieras escolares, permitieron resaltar el papel indispensable del habitus como sistema de percepción duradero y transponible movilizado por los estudiantes. Este camino investigativo permitió delimitar o (re)conocer la situación con las matemáticas asociadas al tipo de problema considerado. Los resultados permiten dar respuesta, no exhaustiva, al problema de interés de la teoría antropológica de la didáctica, así como estimular futuras investigaciones sobre modelización matemática condicionada a géneros textuales.

Palabras clave: Modelización matemática inversa, Teoría antropológica de la didáctica, *Habitus*, Situación con las matemáticas.

Résumé

Cet article aborde le problème de la modélisation mathématique inverse interprétée par le type de tâche qui consiste à trouver la situation avec les mathématiques pouvant être associée à un modèle mathématique. L'objectif était de créer des conditions au sens de la théorie anthropologique de la didactique qui permettent de mettre en évidence ce problème. Pour cela, les ressources théoriques et méthodologiques de la théorie anthropologique ont été utilisées, plus spécifiquement, à partir du cycle d'investigation de la modélisation mathématique pour délimiter une trajectoire possible de formation avec des lycéens de l'école fondamentale. Les résultats trouvés, à travers des expérimentations empiriques basées sur un problème dans le cadre des mathématiques financières scolaires, ont permis de mettre en évidence le rôle indispensable de l'habitus comme système de perception durable et transposable mobilisé par les élèves. Ce parcours d'investigation a permis de délimiter ou (re)connaître la situation avec les mathématiques associée au type de problème considéré. Les résultats permettent de répondre, de manière non exhaustive, à la problématique d'intérêt de la théorie anthropologique du didactique, ainsi que de stimuler les recherches futures sur la modélisation mathématique conditionnée aux genres textuels.

Mots clés : Modélisation mathématique inversée, Théorie anthropologique du didactique, *Habitus*, Situation avec les mathématiques.

Introdução e justificativa do problema de investigação

Um dos objetivos centrais da Educação Matemática apontado por Fukushima (2021, p. 1, tradução nossa) "é desenvolver a competência para resolver matematicamente situações problemas da vida real"[2], o que, segundo o autor, tem levado muitos pesquisadores a trabalharem no estudo de competências da Modelagem Matemática, doravante MM. Nesse sentido, não é por acaso que:

> Modelagem e aplicações são componentes essenciais da matemática, e a aplicação do conhecimento matemático no mundo real é uma competência central da alfabetização matemática; assim, promover a competência dos alunos na resolução de problemas do mundo real é um objetivo amplamente aceito da educação matemática, e a modelagem matemática está incluída em muitos currículos em todo o mundo[3] (Cevikbas, Kaiser & Schukajlow, 2021, p. 206, tradução nossa).

Parece que a MM é concebida predominantemente como "um campo mundialmente renomado de pesquisa em educação matemática"[4] (Greefrath & Vorhölter, 2016, p.1, tradução nossa) e, como tal, nas últimas décadas, tornou-se um importante tópico de pesquisa voltado para o ensino e a aprendizagem de objetos matemáticos, conforme observam Barquero (2020) e Florensa, Garcia e Sala (2020).

Embora diferentes pesquisas sobre a MM, na perspectiva da Educação Matemática, apontem para dificuldades reveladas por alunos e professores em sala de aula, em particular, no estudo de problemas sobre contextos reais como encaminham Sodré e Guerra (2018), Sodré (2019) e Fukushima (2021), a literatura da área (Borromeo Ferri, 2006; Blum & Borromeo Ferri, 2009, Perrenet & Zwaneveld, 2012, Blum, 2015, Greefrath & Vorhölter, 2016, Vorhölter et al., 2019, Barquero & Jessen, 2020) propõe o uso do ciclo de MM como uma ferramenta didática para minimizar parte da complexidade provedora de dificuldades para alunos e professores.

No entanto, na perspectiva da Teoria Antropológica do Didático, daqui em diante TAD, aqui assumida como recursos teórico-metodológico para a construção do problema de investigação, a noção do ciclo de MM apresentado na literatura da área é transposto para um arcabouço teórico sólido (Garcia et al., 2006), inclusive, como destacam Sodré e Guerra (2018) e Sodré (2019) pela proposição do *Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática*, doravante CIMM.

---

[2] Fragmentos do texto: [...] is to develop the competency to solve problems in real-life situations mathematically.
[3] Fragmento do texto: Modelling and applications are essential components of mathematics, and applying mathematical knowledge in the real world is a core competence of mathematical literacy; thus, fostering students' competence in solving real-world problems is a widely accepted goal of mathematics education, and mathematical modelling is included in many curricula across the world.
[4] Fragmento do texto: *is a world-renowned field of research in mathematics education.*

O CIMM (Sodré & Guerra, 2018, Sodré, 2019) pode ser interpretado como uma organização praxeológica e, com isso, assume "um duplo papel funcional enquanto dispositivo didático-metodológico: para o ensino-aprendizagem de MM e para a formação docente" (Sodré, 2021b, p. 17), ao chamar para si uma infraestrutura praxeológica de saberes matemáticos e não matemáticos.

De outro modo, o CIMM integra-se na dinâmica de "uma epistemologia realmente *funcional* em que os saberes apareçam como 'máquinas' produtoras de conhecimentos úteis para a criação de respostas *R* a questões *Q*" (Bosch & Gascón, 2010, p. 82, tradução nossa), cujos saberes apontados por Bosch e Gascón (2010) são aqui compreendidos por meio de modelos matemáticos.

A organização praxeológica do CIMM é dotada de seis tarefas sequenciais, a saber:

- Tarefa T_0 – Construir uma Situação de Referência Inicial para o problema em contexto;
- Tarefa T_1 – Investigar os modelos matemáticos que vivem na instituição escolar relacionados ao problema em contexto;
- Tarefa T_2 – Encontrar situações com matemática que podem ser associadas a um modelo matemático;
- Tarefa T_3 – Avaliar os modelos matemáticos;
- Tarefa T_4 – Desenvolver um modelo matemático;
- Tarefa T_5 – Difundir e defender o modelo matemático.

Embora o estudo de um problema em contexto sob condições e restrições impostas ou criadas pelo uso do CIMM não perfaça todas as tarefas, ele pode encaminhar o sujeito (aluno ou professor) a possíveis mudanças na qualidade de relações com diferentes saberes, e com isso, permitir a construção de respostas a problemáticas levantadas por Chevallard (2005) sobre um dado saber, aqui interpretada pelo uso, estudo, produção e transposição didático-institucional de modelos matemáticos.

Nesse sentido, dirigimos nossos olhares para a problemática da tarefa T_2 do CIMM que consiste em *encontrar situações com matemática que podem ser associadas a um modelo matemático*, mas sem desconsiderar a dinâmica e o papel funcional das demais tarefas do CIMM em relações com a tarefa T_2, cuja problemática levantada por Sodré (2021b) é designada de *modelagem matemática reversa*, ou simplesmente MMR, em que a dinâmica da investigação parte do modelo matemático para o (re)conhecimento da situação com matemática a ele associada.

Assim, delimitar um tipo de *situação com matemática*, aqui parafraseado a partir da noção de *práticas sociais com matemática* proposta por Chevallard (2005, p. 174, grifos do autor, tradução nossa), "excede notavelmente o *terreno* originalmente concedido: do ensino da matemática escolar; penetra o conjunto dos usos das matemáticas; infiltra uma infinidade de espaço em que o saber matemático é pertinente e se observa sua manipulação".

As *práticas sociais com matemática* (Chevallard, 2005) podem ser observadas nos diversos espaços institucionais como o das engenharias, das ciências biológicas e/ou de áreas afins e, até mesmo, "nas empresas, oficinas, laboratórios e na manipulação mais geral do saber que não sejam matemáticos, mas que somente funcionam *com matemáticas*" (Ibidem, p. 175, grifos do autor, tradução nossa), tal como pressupõe o estudo de problemas em contexto real na MM escolar.

Por esse prisma, a noção de *situação com matemática* no sentido das práticas sociais com matemática (Chevallard, 2005) nos parece ser mais ampla, logo, inclui as mais diversas manipulações do saber matemático em diferentes contextos institucionais normativos ou não, haja vista que nem sempre um tipo de problema em contexto real está passivo pela delimitação de um tipo de situação com matemática, da qual pode emergir um possível modelo matemático a ela associado. Ou seja, nem sempre um tipo de problema é dotado de uma situação com matemática ou que o mesmo seja matemátizável.

Nesse sentido, "considerar uma situação é o primeiro processo de abstração: considerando uma situação, mantemos da realidade apenas as características que pensamos ser relevantes para a nossa ação"[5] (Revuz, 1971, p. 49, tradução nossa). De outro modo, o autor destaca que "uma situação é uma parte da realidade que se destaca de seu ambiente e que, em si, queremos considerar"[6] (Ibidem, tradução nossa).

Esses extratos de textos parecem evidenciar que o tipo de problema a ser enfrentado por um sujeito ou uma comunidade de estudos não se confunde com a noção de situação com matemática que dele pode emergir, isto é, o produto da abstração do sujeito frente ao tipo de problema considerado e, com isso, vale-se de suas experiências acumuladas em sua história de vida pessoal e institucional. Nossas afirmações sobre essa discussão podem ser explicitadas a partir das observações de Chevallard (2013a):

> Quando uma telha cai de um telhado sobre a sua cabeça, isso é um fato, apenas um fato, mesmo que ele seja muito desagradável. Mas a ciência não está interessada neste evento

[5] Fragmento do texto: To consider a situation is a first process of abstraction: considering a situation, we keep only from reality the features that we think relevant to our action.
[6] Fragmento do texto: A situation is a portion of reality which is separated from its environment and which we want to consider in itself.

> em particular. A física, para dar um exemplo disso, estuda os fenômenos relativos à queda dos corpos pesados; e a medicina estuda outros fenômenos relevantes, como as consequências da telha caindo na sua cabeça... (Chevallard, 2013a, p. 2).

O episódio supracitado sobre a queda de uma telha revela distintas delimitações subjetivas de situações sobre o mesmo fato tanto para o físico quanto para o médico. Para o físico, seu olhar parece direcionado ao fenômeno da queda dos corpos, buscando estabelecer as leis que supostamente governam o fenômeno, cujas relações desse sujeito indicam serem mais amplas, a partir de suas experiências com os conhecimentos teóricos e/ou práticos.

Em todo caso, os conhecimentos teóricos e/ou práticos permitirão elaborar suposições e, com isso, revelar "mais relações do que a nossa familiaridade direta com o mundo dos fatos nos permitiria reconhecer" (Chevallard, 2013a, p. 2). Do ponto de vista do médico, esse fenômeno permite a delimitação da situação sobre as consequências de queda da telha na cabeça de uma pessoa.

Vale observar dois dos perigos destacados por Revuz (1971) que podem ameaçar o ensino de matemática: confundir a situação e o modelo matemático e estudar o modelo como se fosse a situação, o que impede de serem estudados separadamente.

O outro perigo, segundo Revuz (1971), é separar fortemente a situação e o modelo e, com isso, ignorar complemente um deles sem nunca fazer referências a um desses termos, como parece dominante em alguns casos na escola básica, quando o estudo de modelos matemáticos em diversas disciplinas é direcionado sem maiores relações com as situações a eles associadas. Parafraseando Wittgenstein (1999, p. 129, grifos do autor), "todo signo *sozinho* parece morto. O que lhe dá vida? – No uso, ele *vive*", isto é um modelo matemático assim como um signo só tem sentido em seu uso frente a uma situação.

Usar um modelo matemático frente ao estudo de uma situação com matemática inclui de modo determinante "conhecer e conhecer, no sentido da TAD, é usar de modo adequado" (Sodré, 2019, p. 96), isto é, de acordo com a situação com matemática associada, o que pressupomos a partir da linha teórica da TAD é a necessidade de o sujeito manipular o modelo matemático para a construção ou ampliação de maiores qualidades de relações (Chevallard, 2005) com os objetos de saberes, em particular, os saberes não matemáticos que conformam e são conformados por saberes matemáticos nas práticas sociais em geral, incluindo o contexto escolar.

Nossos pressupostos se assentam a partir do indispensável papel dos saberes não matemáticos, tais como os saberes culturais ou mais precisamente os "saberes práticos, que se colocam em funcionamento, se aprendem, se enriquecem, sem serem entretanto utilizados, ensinados, produzidos" (Chevallard, 2005, p. 154, grifos do autor, tradução nossa) e, como tais, são instituídos na cultura das práticas sociais, aqui interpretados no sentido do *habitus* de Bourdieu (2004, 2013), enquanto "sistemas de *disposições* duráveis e transponíveis, estruturas estruturadas predispostas a funcionar como estrutura estruturantes, ou seja, como princípios geradores e organizadores de práticas e de representações [...]" (Bourdieu, 2013, p. 87, grifos do autor).

Sob esse olhar, o tipo de tarefa $\mathbf{T_2}$ do CIMM, que consiste em *encontrar situações com matemática que podem ser associadas a um modelo matemático*, tornar-se-ia problemático, como destaca Sodré (2021b), mais precisamente, por pressupormos que a construção da situação com matemática pode se revelar paulatinamente em consonância com o *habitus* do campo de práticas que refere o tipo de problema em contexto considerado, pois uma prática que inclui a ação de encontrar a situação com matemática, segundo Wacquant (2007, p. 66) a partir das observações de Bourdieu, "é, antes, o produto de uma relação dialética entre a situação e o habitus".

Nossos pressupostos se apoiam a partir de observações de Sodré e Guerra (2018) e Sodré (2019), ao destacarem que o estudo de um tipo de problema em contexto concreto exige considerar um domínio de realidade, isto é, uma situação com matemática, pois, segundo Revuz (1971, p.50, tradução nossa), "como em todos os casos, o mais difícil é saber o que são as situações"[7]. Conhecer a situação com matemática inclui a capacidade de reconhecê-la e, com isso, questionar a ilusão de naturalidade dos saberes necessários, senão indispensáveis, para o estudo de um problema em contexto em MM. Assim,

> Deve-se enfatizar que os processos de amálgama não são de forma alguma "naturais": são o produto do trabalho humano. Como outras abordagens teóricas nas ciências sociais, a TAD se esforça para "desconstruir" a ilusão de naturalidade das obras humanas, que é talvez a ilusão central que temos que enfrentar na abordagem científica do conhecimento e sua difusão[8] (Chevallard, 2019b, p. 95, tradução nossa).

A ratificação ou não de nossa hipótese sobre a problemática da MMR destacada por Sodré (2021b) nos encaminha, conforme os pressupostos da TAD aqui assumidos, em particular, a partir do Problema Básico[9] destacado por Chevallard (2009b), à seguinte questão de investigação: *Dadas determinadas restrições, que conjunto de condições presentes no estudo de um problema em contexto uma instituição ou pessoa pode integrar em suas práticas*

---

[7] Fragmentos do texto: *As in every case, the most difficult is to know what the situations are.*

[8] Fragmentos do texto: it should be stressed that amalgamation processes are in no way "natural": they are the product of human work. Like other theoretical approaches in the social sciences, ATD endeavors to "deconstruct" the illusion of naturalness of human works, which is maybe the central illusion that we have to come to grips with in the scientific approach to knowledge and its diffusion.

[9] O Problema Básico anunciado por Chevallard (2009, p. 17, tradução nossa) é descrito nos seguintes termos: Dadas determinadas restrições sobre tal instituição, ou tal pessoa, que conjunto de condições sob as quais a instituição, ou a pessoa, pode fazer integrar a seu equipamento praxeologico tal entidade praxeológica designada?

para encaminhar a delimitação da situação com matemática, cuja situação pode estar associada a um modelo matemático?

Na esteira dessa construção, é preciso observar que "na TAD, estudam-se as condições que favorecem ou impedem a difusão do conhecimento"[10] (Chevallard, 2019b, p. 95, tradução nossa). Em princípio, de acordo com Chevallard (2009b), tudo é condição, e como um dos objetos de interesse da didática, estas não são enumeradas a priori, ou seja, "a sua descoberta é progressiva e a compreensão de seu papel na difusão de uma determinada entidade praxeológica $\wp$ são os objetivos permanentes da pesquisa em didática"[11] (Chevallard, 2009b, p. 12, tradução nossa).

Assim, objetivamos criar condições no sentido da TAD que permitam evidenciar a problemática da MMR, a partir do estudo de um problema em contexto da matemática financeira escolar com alunos do ensino básico. Os alunos ficariam diante de uma *série de situações* apropriadas, as quais possibilitam o sujeito construir seu conhecimento (Chevallard, 2005, p.102, grifos do autor), pois "dentre as condições de interesse para a pesquisa didática, grande parte é criada *intencionalmente* por pessoas e instituições"[12] (Chevallard, 2019b, p. 96, grifos do autor, tradução nossa).

A dialética entre a noção de situação com matemática e o *habitus*

De acordo com Chevallard (2005),

> Tentar delimitar vantajosamente (particularmente graças a certas economias retrospectivas) a génese sócio histórica do saber designado para ser ensinado. Tomando em conta as realizações atuais, seria possível constituir uma epistemologia artificial como resumo melhorado – isto é, deixando de lado os becos sem saída, as falhas, mas reimplantando toda a riqueza de desenvolvimentos fértil e por vezes esquecidos da construção histórica do saber (Chevallard, 2005, p. 54-55, tradução nossa).

Sob essa ótica, é possível destacar fragmentos histórico-epistemológicos de algumas obras como a de Maclaurin (1753) e de Euler (1795), cujos recortes a partir da escolha de uma trajetória, em nosso entendimento, podem gerar transposições didáticas (Chevallard, 1999, 2019b) no sentido de criar condições, nem todas é claro, que tornem possível o ensino de objetos matemáticos, inclusive sob o olhar da análise como assim destaca Maclaurin (1753, p. 64, tradução nossa): "a análise é a arte de resolver problemas. Resolvem-se os problemas por meio de equações".

---

[10] Fragmentos do texto: In ATD, one studies the conditions that favor or preclude the diffusion of knowledge.
[11] Fragmentos do texto: leur découverte progressive et la compréhension de leur rôle dans la diffusion de telle ou telle entité praxéologique $\wp$ sont l'objectif permanent de la recherche en didactique.
[12] Fragmentos do texto: At all levels, among the conditions of interest to didactics research, a great number are created intentionally by persons and institutions.

Esse extrato de texto revela que os problemas podem ser tratados por meio de equações matemáticas sem considerar possivelmente o papel de outros saberes, como os saberes práticos que eventualmente podem limitar, senão impedir, a pretensa "tradução" de um problema em uma equação como desejado pela MM.

Esse modo de pensar e agir nos parece também dominante na obra de Euler (1795), quando acentua que:

> o objetivo principal da Álgebra, assim como de todas as partes da Matemática, é determinar o valor de quantidades que eram anteriormente desconhecidas. Consegue-se pesando cuidadosamente as condições prescritas, que são sempre expressas em quantidades conhecidas. (Euler, 1795, p. 451, tradução nossa).

No entanto, Fukushima (2021) destaca a partir de Frejd e Ärlebäck (2011), Galbraith e Stillman (2006), Miwa, (1986) e Treilibs et al., (1980), que "o processo chamado 'matematização', que conecta domínios extramatemáticos com domínios matemáticos é o mais difícil para os alunos"[13] (Fukushima, 2021, p. 1, tradução nossa) e, não somente, pois também tem se mostrado problemático aos professores quando estes são colocados em contextos incomuns, conforme atesta Grandsard (2005). Assim, "a transformação de um problema do "mundo não-matemático" ao "mundo matemático" e, vice-versa, parece não evidenciar o papel de outros saberes, inclusive, os saberes práticos não matemáticos que são considerados pela TAD" (Sodré, 2021b, p. 3).

A "transformação" de um problema em contexto em um problema matemático tem se mostrado problemático. Não é por acaso que Blum (2015, p. 79, tradução nossa) ratifica que "muitos alunos já estão presos aqui. Isso não é apenas nem mesmo primariamente uma deficiência cognitiva"[14].

De qualquer modo, embora Euler (1795) encaminhe algumas condições prescritas no sentido de pensar cuidadosamente sobre o tipo de problema considerado, assim como Maclaurin (1753) pressupõe, deixando parecer que todo problema pode ser equacionado, Blum (2015) aponta uma estratégia dos alunos para os problemas em contextos: *"ignore o contexto, apenas extraia todos os dados do texto e calcule algo de acordo com um esquema familiar"*[15]

[13] Fragmento do texto: the process called 'mathematization,' which connects extra-mathematical domains with mathematical domains is the most difficult for students.
[14] Fragmento do texto: *Many students get stuck already here. This is not only or even not primarily a cognitive deficiency.*
[15] Fragmento do texto: *"Ignore the context, just extract all data from the text and calculate something according to a familiar schema"*

(Blum, 2015, p.79, grifos do autor, tradução nossa). Em face disso, é imperioso considerar os apontamentos de Brady e Lesh (2021):

Simplificar situações da vida real ao ponto que elas se concentram em uma única construção matemática ou tópico na maioria das vezes remove esses aspectos do sistema: embora isso possa ser desejável de uma perspectiva de aplicações, é inaceitável de uma perspectiva de modelos e modelagem.[16] (Brady e Lesh, 2021, p. 2, tradução nossa).

Além das observações de Brady e Lesh (2021), é preciso considerar que Maclaurin (1753) não destaca como o sujeito pode fazer associações entre as equações e o tipo de problema, ou ainda como reconhecer a equação adequada ou o tipo de tarefa a ser enfrentada a partir da equação matemática, aqui interpretada no sentido dos modelos matemáticos.

Essas práticas não parecem simples, pois “não é fácil falar da prática de uma maneira que não seja negativa; e principalmente da prática no que ela tem mais de mecânico em aparência, de mais oposto à lógica do pensamento e do discurso” (Bourdieu, 2013, p. 133).

De outro modo, Maclaurin (1753) e Euler (1795) parecem assumir por pressuposição, que os problemas podem ser resolvidos por meio de equações, embora nem sempre seja possível.

Por exemplo, pode haver um local sagrado para uma população indígena que é conhecida também por ser rico em minerais. Pode ser possível analisar os custos econômicos e os benefícios da exploração mineral do sítio por meio de uma detalhada descrição matemática. No entanto, é impróprio e impossível "matematizar" o significado cultural do sitio[17] (Christensen, Skovsmose & Yasukawa, 2008, p. 78, tradução nossa).

Delimitar uma situação com matemática que pode estar associada a um modelo matemático não parece uma tarefa simples, inclusive em possíveis problemas contextualizados no ensino básico pelo tópico de regra de três e proporcionalidade, como segue:

Em uma gráfica são feitas impressões de livros escolares. Em 2 horas, são realizadas 40 impressões. Em 3 horas, a mesma máquina produz mais 60 impressões, em 4 horas, 80 impressões, e, em 5 horas, 100 impressões.

[16] Fragmento do texto: Simplifying real life situations to the point that they center on a single mathematical construct or topic most often removes these systems aspects: whereas this can be desirable from an applications perspective, it is unacceptable from a models and modeling perspective.

[17] Fragmentos do texto: *For example, there may be a sacred site for an indigenous population that is known also to be rich in minerals. It may well be possible to analyse the economic costs and benefits of mining that site through a detailed mathematical description; however, it is both inappropriate and impossible to “mathematise” the cultural significance of the site.*

Tabela 1.

Relação entre o tempo e o número de impressões

Tempo (h)	2	3	4	5
Impressões	40	60	80	100

A constante de proporcionalidade entre as grandezas é encontrada pela razão entre o tempo de trabalho da máquina e o número de cópias realizadas: $\frac{2}{40} = \frac{3}{60} = \frac{4}{80} = \frac{5}{100} = \frac{x}{y} = \frac{1}{20}$. (Fonte: https://www.todamateria.com.br/grandezas-proporcionais-grandezas-diretamente-inversamente-proporcionais).

Nesse fragmento específico e, de nosso interesse, revelam-se de imediato as grandezas tempo (x) e o número de impressões (y), sendo diretamente proporcionais. Então, da relação: $\boldsymbol{\frac{x}{y} = \frac{1}{20}}$, é possível designar o número de impressões (y) pelo modelo matemático dado por: **y = 20.x**, como um dos possíveis modelos associado à situação com matemática de regra de três simples. Esse jeito de fazer e de pensar pode revelar que o sujeito assume as grandezas como diretamente proporcionais, mesmo que os tipos de problemas não evidenciem elementos suficientes para assegurar ou não a proporcionalidade.

Ou seja, a mobilização das práticas do sujeito frente ao tipo de problema encaminha a dialética entre a situação com matemática e o *habitus*, este aqui entendido como produtor de práticas, isto é, "presença operante de todo o passado do qual é produto" (Bourdieu, 2013, p. 93). De outro modo, o *habitus*, "como toda *arte de inventar*, é o que permite produzir práticas em um número infinito, e relativamente imprevisíveis (como as situações correspondentes)" (Ibidem, p. 92, grifos do autor).

Sob esse olhar, a cultura dominante das práticas escolares parece não evidenciar o que apontam Barquero, Bosch e Gascón (2007) no seguinte extrato de texto:

> Não levantam, portanto, perguntas sobre a "comparação" do grau de adequação de dois ou mais modelos do mesmo sistema, nem sobre a necessidade de modificar progressivamente um modelo determinado para dar resposta a novas questões problemáticas porque o sistema é suposto construído de uma vez por todas (não há questões "novas" previstas antecipadamente), nem sobre a necessidade de elaborar modelos de modelos (a recursividade da modelagem matemática é completamente ignorada na prática escolar)[18] (Barquero, Bosch & Gascón, 2007, p. 7, tradução nossa).

[18] Fragmento do texto: *No se plantean, por tanto, preguntas sobre la "comparación" del grado de adecuación de dos o más modelos de un mismo sistema, ni sobre la necesidad de modificar progresivamente un modelo determinado para dar respuesta a las nuevas cuestiones problemáticas porque el sistema se supone construido de una vez por todas (no aparecen cuestiones "nuevas" no previstas de antemano), ni sobre la necesidad de elaborar modelos de los modelos (la recursividad de la modelización matemática es completamente ignorada en la práctica escolar).*

É preciso considerar que os dados numéricos do tópico de regra de três e proporcionalidade podem encaminhar a construção de outros modelos matemáticos, tais como:

$y_1 = 22{,}87.e^{0{,}303.x_1}$, com erro de $R^2 = 0{,}982$ (modelo I);

$y_2 = 64{,}67.\ln(x_2) - 7{,}411$, com erro de $R^2 = 0{,}982$ (modelo II);

$y_3 = 20.x_3 - 1 + Cos[(x_3 - 2).(x_3 - 3).(x_3 - 4).(x_3 - 5)]$ (modelo III);

$y_4 = 20.x_4 + Sen[(x_4 - 2).(x_4 - 3).(x_4 - 4).(x_4 - 5)]$ (modelo IV).

Parece-nos que grande parte dos objetos de ensino que envolvem grandezas proporcionais é definida por uma decisão do sujeito frente ao tipo de problema em contexto, embora outros modelos possam assegurar a relação entre as grandezas envolvidas e, com isso, produzir até mesmo, respostas aceitáveis ao tipo de problema considerado. Assim, "muitos modelos podem ser imaginados para uma situação, e muitas situações diferentes podem ser representadas por um mesmo modelo. A tarefa difícil é de escolher, se possível, o melhor modelo"[19] (Revuz, 1971, p. 49, tradução nossa).

Os modelos matemáticos designados **I**, **II**, **III** e **IV** nos ajudam a compreender que uma situação com matemática pode produzir diferentes modelos matemáticos a ela associados. Nesse caminhar, um questionamento pode emergir: o que determina a escolha de um modelo matemático? Ora, a escolha do modelo além das experiências e dos *habitus* incorporados pelo sujeito que modela, em geral, é condicionada pela conformidade da prática social que está em jogo, isto é, depende do meio institucional onde o sujeito que modela é parte integrante, pois, nessa dinâmica, os saberes práticos na função dos *habitus* são determinantes para tomadas de decisões, incluindo a escolha ou não de um modelo matemático. De outro modo, "correto e falso é o que os homens *dizem*; e na *linguagem* os homens estão de acordo. Não é um acordo sobre as opiniões, mas sobre o modo de vida" (Wittgenstein, 1999, p. 98, grifos do autor).

Sob esse viés, a perspectiva da MM contraria a noção de conversão proposta por Duval (2011), embora este reconheça a existência de dificuldades de alunos para "encontrar a equação de uma reta partindo de sua representação gráfica, até para os casos mais elementares" (Duval, 2011, p.97).

Para Duval (2011, p. 97), "a razão profunda dessas dificuldades não se deve procurar nos conceitos matemáticos ligados à função afim, mas na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão

[19] Fragmento do texto: *Many models can be imagined for one situation, and many different situations may be represented by the same model. A difficult task is to choose, if possible, the best model.*

algébrica", o que parece evidenciar uma estreita relação de correspondência entre dois registros: o registro gráfico e o registro da equação. O autor parece não revelar possibilidades de uso de outras equações matemáticas a partir dos dados numéricos de um gráfico ou até mesmo de uma tabela como supracitado.

Em última análise, a estratégia usada pelos alunos para ignorarem o contexto e da qual pode emergir uma situação com matemática, conforme aponta Blum (2015), pode se mostrar problemática, se considerarmos os clássicos problemas da aritmética prática, caso da regra de três descrito por Silva (2017) no seguinte exemplo: "Se uma moça de dezesseis anos, com sua voz doce como a de um grou, dançando e gorjeando como um pavão, recebe 600 moedas, quanto receberia uma de 25 anos? (Brahmasphutasiddhanta: 769, apud Sarma, 2002, p. 150, tradução nossa) (apud Silva, 2017, p. 61).

Esse tipo de problema em um curso de formação inicial de professores revelou respostas, cuja transcrição dos registros de dois dos professores designados **P_1** e **P_2**, são aqui explicitados:

- **P_1** – *eu usaria proporcionalidade direta, mas a informação sobre a voz e a dança, para eu deve ter alguma "pegadinha" que eu não estou enxergando... usando a proporcionalidade sendo uma de dezesseis e a outra de vinte e cinco... se a de dezesseis recebe seiscentas moedas ai eu teria né... que se de dezesseis para vinco e cinco são nove anos então eu usaria essa mesma proporcionalidade ...no caso eu multiplico seiscentos por nove então encontraria a resposta de cinco mil e quatrocentas moedas então eu faria desta forma. Entretanto, eu fique nesta ideia se não existe outra informação por traz. [Sic]*
- **P_1** - *Mas é preciso observar se essa proporcionalidade se fosse linear...tem que observar se realmente existe essa linearidade, se essa proporcionalidade é de acordo com os anos, ou se existe outros fatores para que realmente variação mude. [sic]*
- **P_2** – *Esse texto é curioso não sei se tem pegadinha ai pelo meio, a primeira pergunta que eu me faria...para ganhar moedas é suficiente apenas ter uma certa idade, porque pelo relato da questão parece que a moça que ganhou seiscentas moedas, além de ter essa idade que eu poderia pensar simplesmente em um problema de proporção e diretamente proporcional... poderia pensar assim inicialmente, quanto mais velha mais moedas, porém eu começo a perceber através da leitura que tiveram fatores que eu não sei se foram importantes para isso, tipo assim um cache essa voz, a maneira de dançar, porque se isso tudo importar e não apenas a idade como é que eu poderia pagar essa moça de vinte e cinco anos? já que a única informação que eu sei dela, o único relato na questão para ela poder tentar almejar alguma coisa será que ela teria que ter uma voz parecida? Será que ela teria que dançar desse jeito como um pavão? E outra coisa eu acho que já é um pouquinho de viagem não que as outras colocações não tenham sido...é quanto receberia uma de vinte e cinco anos? Com uma dúvida um pouco remota já esses vinte e cinco anos será que seria referente a uma nova pessoa? Ou de repente a idade de outro fator como moedas? É interessante notar que a primeira idade de dezesseis anos está escrita por extenso já na outra tem um numeral escrito antes...são algumas colocações assim com sinceridade. [sic]*

Esses fragmentos apontados pelos professores $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ ajudam a compreender parte da complexidade que envolve a problemática da delimitação de uma situação com matemática que pode estar associada ao tipo de problema considerado, por pressuporem, em nosso entendimento, a existência de elementos culturais condicionadores do jeito de fazer e de pensar sobre o tipo de problema, isto é, os *habitus* específicos da cultura da prática. Ou seja, o *habitus* enquanto sistema de disposições duráveis e transponíveis pode ser então interpretado de maneira aproximada ao "modo de agir comum a todos os homens como sistema de referência, por meio do qual interpretamos uma linguagem desconhecida" (Wittgenstein, 1999, p. 93).

Com esse olhar:

> É na medida e somente na medida em que os habitus são a incorporação da mesma história – ou, mais exatamente, da mesma história objetivada nos habitus e nas estruturas – que as práticas que engendram são mutuamente compreensíveis e imediatamente às estruturas [...] (Bourdieu, 2013, p. 95).

Assim, a noção de situação com matemática está em estreita relação com o *habitus* do campo de prática em que se insere e, talvez por isso, mas não somente, ela seja de interesse da Teoria das Situações Didática (Brousseau, 1995), além da TAD, por constituir a forte hipótese da própria definição de conhecimento matemático. Por sua vez, os conhecimentos são descritos em termos de situações, isto é, "um conhecimento é uma situação"[20] (Bosch & Chevallard, 1999, p. 3, tradução nossa) e, com isso, a "razão de ser ou a *racionalidade* que dá sentido à atividade matemática"[21] (Bosch, Chevallard & Gascón, 2006, p. 3, grifos dos autores, tradução nossa).

Na esteira dessa construção, a estreita relação dialética entre o *habitus* e a situação com matemática pode ser interpretada pela noção da *teoria das relações pessoais e institucionais,* anunciada por Chevallard (2019b). Assim:

> Dado um objeto *o* e uma pessoa *x*, postulamos que existe uma entidade - considerada, a seguir, como um conjunto - chamada de *relação pessoal* de *x* para com *o*. Este conjunto é denotado por *R (x, o)* e compreende todas as "maneiras" em que *x* se relaciona com *o* - refletindo sobre *o*, falando ou escrevendo sobre *o*, usando *o*, manipulando *o*, sonhando ou sonhando acordado ou fantasiando sobre *o*, aprimorando *o*, etc. Em um sentido ampliado do verbo saber, a relação de *x* com *o, R(x, o)*, encapsula tudo o que *x* "sabe" sobre *o*[22] (Chevallard, 2019b, p. 77, grifos do autor, tradução nossa).

---

[20] Fragmento do texto: *une connaissance est une situation*.

[21] Fragmento do texto: *a situation includes the "raison d'être" or rationale that gives sense to the performed mathematical activity.*

[22] Fragmento do texto: Given an object o and a person x, we posit that there exists an entity—regarded, in what follows, as a set—called the personal relation of x to o. This set is denoted by R(x, o) and comprises all the "ways" in which x relates to o—through pondering over o, speaking or writing about o, using o, handling o, dreaming or daydreaming or fantasizing about o, spiffing it up, etc. In an expanded sense of the verb to know, the relation of x to o, R(x, o), encapsulates all that x "knows" about o.

Mediante nossos pressupostos sobre a complexidade que pode revelar a realização da tarefa $\mathbf{T_2}$ do CIMM (Sodré & Guerra, 2018, Sodré, 2019), acreditamos que seu enfrentamento pode inclusive demandar a criação de condições quanto à transposição didática, além de tornar possível o encontro do sujeito com a situação com matemática que pode estar associada a um modelo matemático a partir da noção teórico-metodológica de um Percurso de Estudo e Pesquisa, daqui em diante PEP, em consonância com Chevallard (2013b), ao chamar para si o desenvolvimento de saberes disciplinares e não disciplinares, incluindo os *habitus* do campo de prática em dialética com as situações com matemática que se fazem necessários, senão indispensáveis, para o estudo de um problema em contexto em MM escolar.

De modo a ratificar ou não nossa hipótese, encaminhamos um recorte empírico realizado com alunos do ensino básico de uma escola pública.

Recorte empírico e análise de resultados encontrados

O processo de estudos foi desenvolvido em um curso realizado com vinte (20) alunos do ensino médio da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará (EA/UFPA), que aqui simbolizamos por: $\mathbf{X = (x_1, x_2, x_3,..., x_{18}, x_{19}, x_{20})}$. Foram formados quatro grupos de cinco alunos. Em cada grupo, instalaram-se *sistemas didáticos* descritos por $\boldsymbol{S_i = (S_1, S_2, S_3, S_4)}$, a partir das problemáticas enfrentadas, sob a orientação de um diretor de estudos (***d***), como destaca a dinâmica do PEP (Chevallard, 2013b):

> Em geral, um PEP é encaminhado a partir de questionamentos indeterminados Q_i que são respondidos por questionamentos determinados Q_{ij} durante a investigação (Chevallard, 2009), o que "pode conduzir uma classe a reencontrar um complexo de obras que podem variar dependendo do percurso tomado (o que depende da atividade de X, das decisões de Y, mas também dos recursos praxeológicos $R_i^\lozenge$ e O_j atualmente acessíveis)" (Chevallard, 2009, p. 28, tradução nossa), que pode ser modelado pela noção de sistema didático principal S(X, Y, Q) passível de produzir ou não sistemas didáticos auxiliares para construir respostas fortes (Sodré, 2021a, p. 105).

O processo de estudos efetivou-se por meio de um tipo de problema de investimento de capitais da matemática financeira escolar, descrito nos seguintes termos:

- **Tipo de problema específico – $\mathbf{Q_0}$:** Como determinar o valor de retorno em um investimento em uma poupança de R$ 500,00, ao final do período de três meses?

A partir desse tipo de problema, os sistemas didáticos $\boldsymbol{S_i}$ manifestaram o seguinte questionamento: $\boldsymbol{Q_1}$ *– Qual a taxa da poupança?*

Após a consulta em fontes de sites da internet, os sistemas didáticos elegeram, de modo consensual, o valor médio de aproximadamente 0,5% ao mês. Nesse sentido, os sistemas didáticos $\boldsymbol{S_i}$ parecem revelar ações que podem ser traduzidas pelas tarefas $\mathbf{T_0}$ e $\mathbf{T_1}$ do CIMM, ao encaminharem jeitos de fazer e de pensar sobre uma situação inicial com matemática, desenhada pelo uso dos modelos matemáticos disponíveis na literatura escolar, conforme orienta a Figura 1.

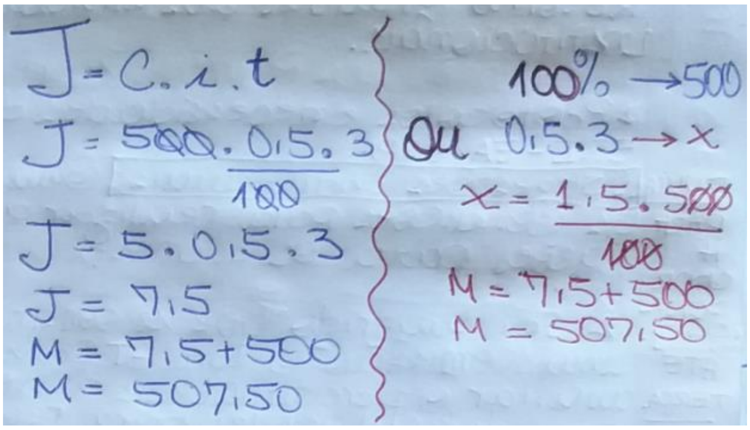


Figura 1.

Fórmula de juros simples (J= c.i.t) e a prática de regra de três (Acervo da pesquisa, 2019)

A Figura 1 destaca, mas não somente, a objetivação de duas organizações praxeológicas pelo sistema didático S_4, isto é: $\wp_1$ que pode designar a fórmula de juros simples e $\wp_2$ para representar a clássica prática de regra de três sob o discurso gráfico estrutural da quarta proporcional. Assim, o sistema didático S_4 assume claramente como grandezas diretamente proporcionais, embora essas organizações praxeológicas descritas por $\wp_1$ e $\wp_2$ aqui interpretadas como modelos matemáticos, produzam a mesma resposta numérica, ambos não se confundem, pois mesmo que guardem similaridades nas *práxis*, os discursos que os orientam são distintos. De outro modo:

> Uma situação próxima, mas distinta, ocorre quando duas praxeologias diferentes $\mathscr{p}$ e $\mathscr{p}'$ existem, ambas relativas ao tipo de tarefas T. [...] Notemos também que, mesmo se $\tau' = \tau$, $\mathscr{p}$ e $\mathscr{p}'$ podem diferir por causa de blocos tecnológico-teóricos distintos $\Lambda = [\,\theta / \Theta\,]$ e $\Lambda' = [\,\theta' / \Theta'\,]$, caso em que o usuário verá através de elementos tecnológicos ou teóricos distintos[23] (Chevallard, 2020, p. 30-31, tradução nossa).

É preciso considerar que na TAD "uma praxeologia pode ser considerada como um *modelo* ou *sistema*, dependendo do tipo de perguntas colocadas; ser modelo de um sistema é uma *função* de uma praxeologia, não é da sua natureza"[24] (Garcia et al., 2006, p. 233, grifos dos autores, tradução nossa).

[23] Fragmento do texto: A nearby but distinct situation occurs when two different praxeologies $\mathscr{p}$ and $\mathscr{p}'$ exist, both relative to the type of tasks T. [...] Let us note also that, even if $\tau' = \tau$, $\mathscr{p}$ and $\mathscr{p}'$ may differ because of distinct technologicotheoretical blocks $\Lambda = [\theta / \Theta]$ and $\Lambda' = [\theta' / \Theta']$, in which case the user will come across distinct technological or theoretical elements.

[24] Fragmento do texto: *A praxeology can be considered as a model or a system depending on the kind of questions put; being a model of a system is a function of a praxeology, it is not in its nature.*

O modo de pensar de $\boldsymbol{S_4}$ parece ratificado pela manifestação objetiva do sistema didático $\boldsymbol{S_2}$, quando este destaca a organização praxeológica aqui designada por $\wp_3$, a partir do modelo matemático do cálculo de redução à unidade, orientado pelo discurso da lógica da aritmética prática, conforme a figura 2.

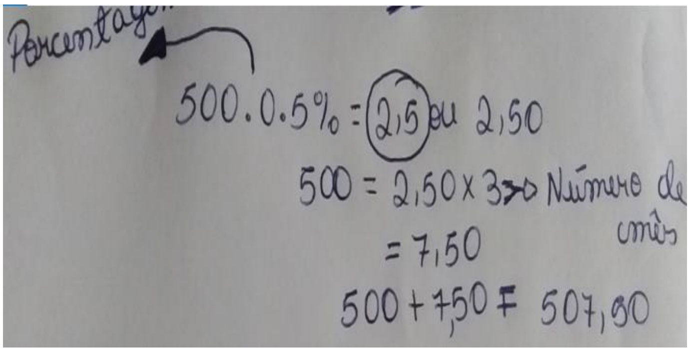


Figura 2.

Modelo matemático do cálculo de redução à unidade segundo a aritmética prática (Acervo da pesquisa, 2019)

Até então, o caminhar da investigação revelou que delimitar a situação com matemática que pode estar associada ao modelo matemático do tipo de problema de investimento de capitais, conforme objetiva a tarefa $\mathbf{T_2}$ do CIMM, é problemático, talvez por esses sistemas didáticos não possuírem o *filtro de percepção* (Chevallard, 2005), ou por não serem dotados dos *habitus* (Bourdieu, 2002, 2013) específicos do campo de prática dos bancos ou de instituições financeiras afins, haja vista *habitus* ser entendido

> como um sistema de disposições duráveis e transponíveis que, integrando todas as experiências passadas, funciona em cada momento como uma matriz de percepções, apreciações e ações e possibilita o cumprimento de tarefas infinitamente diferenciadas graças à transferência analógica de esquemas adquiridos em uma prática anterior (Bourdieu, 2002 [1972], p. 261).

A ausência dos *habitus* do campo de prática das instituições financeiras aos sistemas didáticos pode ser interpretada, na acepção da TAD, pela baixa qualidade de relação com saberes (Chevallard, 2005) indisciplinares, em particular, saberes não matemáticos que dão sentido e significado às situações com matemática das instituições financeiras.

De outro modo, “o *habitus* é essa espécie de senso prático do que se deve fazer em dada situação – o que chamamos, no esporte, o senso do jogo, arte de antecipar o futuro do jogo inscrito, em esboço, no estado atual do jogo” (Bourdieu, 1996, p. 42, grifos do autor).

O estudo do problema de investimento de capitais pelos sistemas didáticos produziu “muito mais do que uma simples solução. Ela produz novos conhecimentos (novos problemas, novas técnicas, novas tecnologias e teorias) e novos arranjos do conhecimento anterior"[25] (Bosch, Chevallard & Gascón, 2006, p. 5, tradução nossa), inclusive na construção do modelo matemático da situação de juros simples, a partir do estudo de outras situações em contexto socializadas na classe, como destaca a Figura 3.

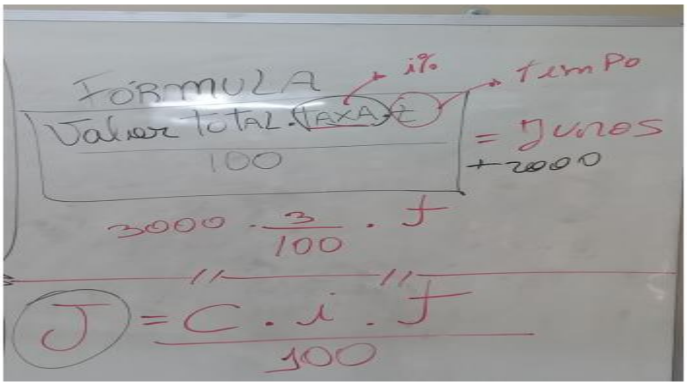


Figura 3.

Construção do modelo matemático da situação de juros simples (Acervo da pesquisa, 2019)

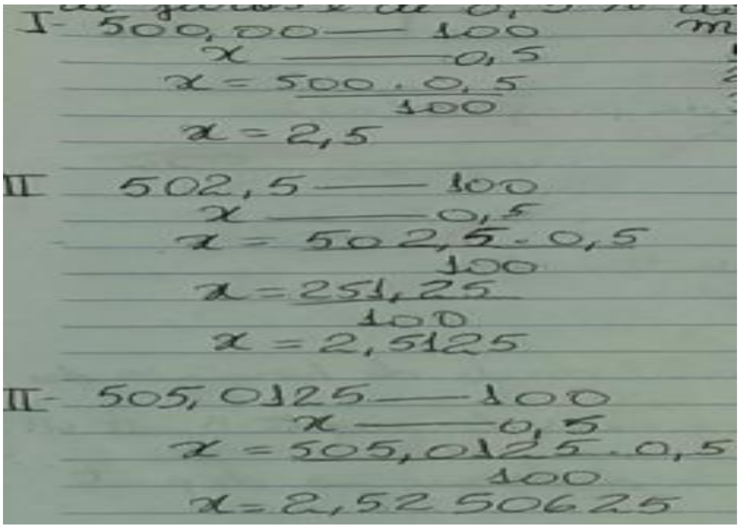
As situações com matemática em contextos financeiros como "criação da cultura, são explicitamente regulados, às vezes de maneira muito precisa, por convenção social. É o caso das transações financeiras, empréstimos de capital, etc., práticas sociais que são de fato *definidas a priori por um modelo matemático*"[26] (Chevallard, 1989, p. 27, grifos do autor, tradução nossa).

O conhecimento da situação com matemática exige que o sujeito seja capaz de reconhecê-la, como destaca Wittgenstein (1976), pois depende da qualidade de relação com os saberes (Chevallard, 2005) que conformam o campo de prática das instituições financeiras, isto é, dos *habitus* como geradores de práticas análogas às práticas incorporadas pelo sujeito. De outro modo, o conhecimento das situações com matemáticas pelos sistemas didáticos revelou objetivamente o encontro com os modelos matemáticos descritos pelas organizações praxeológicas $\wp_1$, $\wp_2$ e $\wp_3$, sem, entretanto, alcançar o encontro com a situação com matemática associada ao tipo de problema do investimento de capitais como orienta a tarefa $\mathbf{T_2}$ do CIMM.

No entanto, durante o percurso de estudos, o sistema didático $\boldsymbol{S_1}$ evidenciou "confrontos" de práticas diante das manifestações objetivas dos demais sistemas didáticos, como indica a figura 4.

[25] Fragmento do texto: *much more than a single solution. It produces new knowledge (new problems, new techniques, new technologies and theories) and new arrangements of previous knowledge.*

[26] Fragmento do texto: *(...) création de la culture, sont explicitement réglés, de manière parfois fort précise, par convention sociale. C'est le cas des transactions financières, du prêt à intérêt, etc., pratiques sociales qui sont en fait définies a priori par un modèle mathématique.*



I- 500,00 —— 100
x —— 0,5
x = 500 . 0,5 / 100
x = 2,5

II 502,5 —— 100
x —— 0,5
x = 502,5 . 0,5 / 100
x = 251,25 / 100
x = 2,5125

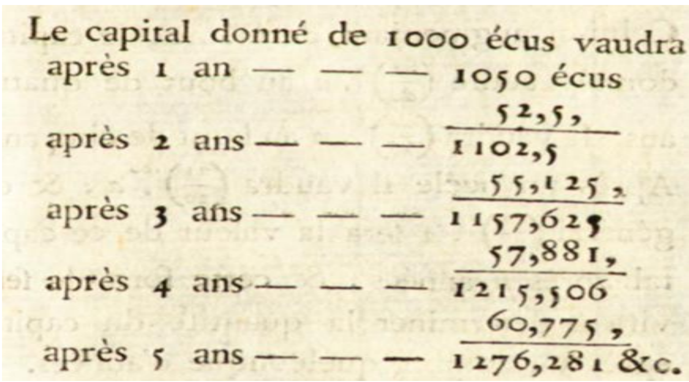
III- 505,0125 —— 100
x —— 0,5
x = 505,0125 . 0,5 / 100
x = 2,52 50625

Figura 4.

A variabilidade do discurso da regra de três como praxeologia de modelagem (Acervo da pesquisa, 2019)

Na Figura 4, o sistema didático S_1 evidencia uma situação com matemática que coloca em jogo um modelo matemático descrito pela organização praxeológica $\wp_4$. Embora guarde semelhanças com a organização praxeológica $\wp_2$ da regra de três**,** talvez por apresentar similaridades na *práxis*, mas o *logos*, isto é, o jeito de pensar ou, mais precisamente, o discurso que orienta a *práxis* é distinto para o mesmo tipo de problema considerado.

A organização praxeológica $\wp_4$ supracitada por S_1 remonta, em nosso entendimento, fragmentos histórico-epistemológicos de uma *criação didática* (Chevallard, 2005) para o ensino, conforme postula Euler (1795), a partir de uma situação específica, como demonstrada na Figura 5.



Le capital donné de 1000 écus vaudra
après 1 an — — — 1050 écus
52,5,
après 2 ans — — — 1102,5
55,125,
après 3 ans — — — 1157,625
57,881,
après 4 ans — — — 1215,506
60,775,
après 5 ans — — — 1276,281 &c.

Figura 5.

Traços de uma possível criação didática para o cálculo de juros (Euler, 1795, p. 433)

A situação especifica (Figura 5) considera um capital de 1000 écus aplicado a 5% ao ano, é dado por:

1 ano - - - 1050 écus

2 anos - - - (1050 + 52,5) = 1102,5

3 anos - - - (1102,5 + 55,125) = 1157,625...

Nesse decorrer, uma condição foi “imposta” por $\boldsymbol{S_1}$: o uso da calculadora científica, levando a instalação de um sistema didático específico: $\boldsymbol{S_1}_{\mathbb{C}}$ ($\boldsymbol{S_1}$, $\wp_{\mathbb{C}}$), em que $\wp_{\mathbb{C}}$ designa “as praxeologias relativas às tarefas de cálculo na calculadora científica, inclusive, com respeito à aritmética de pontos flutuantes, como arredondamento e truncamento” (Sodré & Guerra, 2018, p. 258).

Os “confrontos” de práticas provocados por $\boldsymbol{S_1}$, pelo contraste da situação com matemática revelada por $\boldsymbol{S_2}$, $\boldsymbol{S_3}$ e $\boldsymbol{S_4}$, levou $\boldsymbol{S_1}$ ao encontro de outros saberes não matemáticos, como os de uso da calculadora científica, e, não menos importante, com saberes específicos da situação com matemática que pode estar associada ao modelo matemático. De qualquer maneira, “todas essas respostas são, na verdade rascunhos de respostas, que lhe restam trabalhar”[27] (Chevallard, 2009b, p. 26, tradução nossa).

A resposta produzida por $\boldsymbol{S_1}$ permitiu o contraste com os demais sistemas didáticos e, com isso, dinâmicas cognitivas e praxeológicas foram evidenciadas, especificamente pelo processo de construção e reconstrução de saberes. Ou seja:

> Mesmo que haja uma história da pessoa como sujeito, existe uma *dinâmica cognitiva*, o que faz com que alguns objetos desapareçam do UC(x), enquanto outros irão aparecer, e há uma *dinâmica praxeológica* em que o equipamento praxeológico de x, que denotamos por *EP*(x), muda – algumas partes deste equipamento perdem suas características de operação, enquanto outras partes são remodeladas e novos elementos são adicionados ao longo do tempo[28] (Chevallard, 2009a, p. 6-7, grifos do autor, tradução nossa).

Além disso, o uso da técnica do cálculo realizado, período a período, parece ser reconhecido por Euler (1795) como uma técnica limitada, pois “você pode continuar da mesma maneira por quantos anos quiser; mas quando o número de anos é muito grande, o cálculo torna-se longo e enfadonho; aqui está como podemos encurtá-lo”[29] (Euler, 1795, p. 433, tradução nossa), referindo-se ao uso de um modelo matemático algébrico dado por $\left[\left(\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{20}}\right)^{\boldsymbol{n}} .\ \boldsymbol{a}\right]$, para calcular o montante de um capital **(a)** em um período qualquer de **(n)** anos com uma taxa de 5%.

---

[27] Fragmentos do texto: toutes ces réponses sont en fait des ébauches de réponses, qu’il reste à travailler.

[28] Fragmentos do texto: de même qu’il y a une histoire de la personne comme sujet, il y a une dynamique cognitive, qui fait que certains objets disparaissent de UC(x) tandis que d’autres y apparaissent, et il y a une dynamique praxéologique par laquelle l’équipement praxéologique de x, qu’on peut noter EP(x), change – une partie de cet équipement perdant une partie de son caractère opérationnel tandis que d’autres de ses parties sont rénovées et que des éléments nouveaux viennent s’ajouter au fil du temps.

[29] Fragmento do texto: On peut continuer de la même maniéré pour autant d’années qu’on voudra; mais lórfque le nombre des années est fort grand, le calcul devient long & ennuyeux voici comment on peut l’abréger.

Na realização da tarefa $\mathbf{T_2}$ do CIMM, embora esta se evidencie como um tipo de tarefa problemática aos alunos da escola básica, o percurso realizado produziu encontro com diferentes saberes pela desconstrução e reconstrução dos modelos matemáticos utilizados pelos sistemas didáticos, como uma das condições, no sentido da TAD, que tornou possível, paulatinamente, a introdução de outras condições, por exemplo, o uso de calculadoras científicas para geração de respostas, em estreita relação com as situações com matemáticas. Sob essas condições, mas não somente, o sistema didático $\boldsymbol{S_3}$ encaminhou a estruturação da situação com matemática mais ampla e, com isso, dotou-a de um "novo" estilo de racionalidade (Chevallard, 1999), motivado pela técnica – $\boldsymbol{\tau_1}$ – de regra de três, segundo orienta a figura 6.

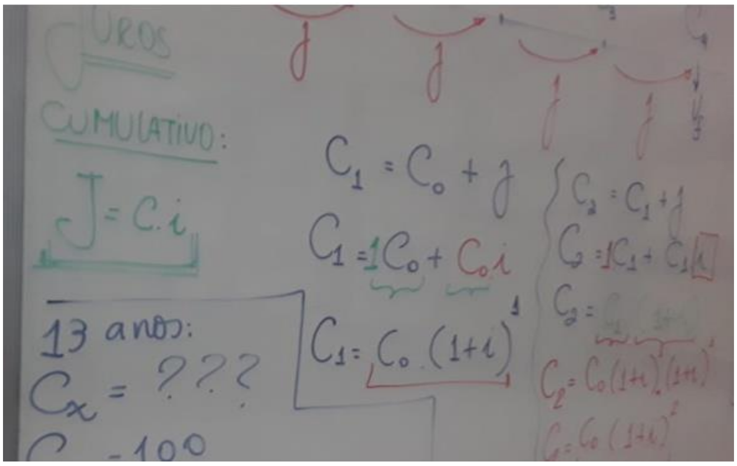


Figura 6.

Reconstrução algébrica do modelo matemático da situação de juros compostos (Acervo da pesquisa, 2019)

Sob esse pensar que encaminhou a construção de uma nova organização praxeológica, "comumente, a ausência praxeológica se traduz, em primeiro lugar, pela falta de técnicas. Como executar tarefas do tipo T? E também: como realizar melhor tarefas deste tipo? Essas questões demandam uma *produção de técnicas* e, portanto, de praxeologias"[30] (Chevallard, 1999, p. 228, grifos do autor, tradução nossa), aqui designada por $\wp_5$, cuja representação traduz o modelo matemático da situação de juros compostos com a funcionalidade de uma nova técnica descrita por $\boldsymbol{\tau_2}$: $\mathbf{C_x = C_0\,(1 + i)^{\,x}}$.

De qualquer modo, Chevallard (2019a, p. 12, grifos do autor, tradução nossa) destaca que "a pessoa recorre não apenas a uma técnica, mas também a uma tecnologia e uma teoria,

[30] Fragmento do texto: Comúnmente, la penuria praxeológica se traduce en primer lugar por una falta de técnicas. ¿Cómo realizar las tareas del tipo T? Y también, o sobre todo: ¿cómo realizar mejor las tareas de este tipo? Estas interrogaciones exigen una producción de técnicas y, por tanto, de praxeologías.

que a *análise praxeológica* deve deixar claro"[31]. No nosso caso, pode ser interpretada pela relatividade institucional do saber, cuja técnica $\boldsymbol{\tau_1}$ de regra de três, funcionou duplamente, além de técnica, também como discurso tecnológico-teórico da organização praxeológica $\wp_5$. Talvez, por isso Chevallard (1999, p. 224, tradução nossa) revele que "na aritmética elementar, em que o mesmo pequeno discurso tem uma dupla função, técnica e tecnológica, que permite tanto encontrar o resultado solicitado (função técnica) quanto justificar que o resultado esperado está correto (função tecnológica)"[32].

Considerações e perspectivas futuras

A realização da tarefa $\mathbf{T_2}$ do CIMM mostrou-se problemática aos alunos da escola básica, a partir do estudo de um problema em contexto real na perspectiva da matemática financeira escolar. Este artigo objetivou criar condições, nem todas segundo a TAD, que permitissem evidenciar a problemática da MMR traduzida pela realização da tarefa $\mathbf{T_2}$ do CIMM, sem desconsiderar o papel funcional das tarefas $\mathbf{T_0}$ e $\mathbf{T_1}$ do referido modelo.

A trajetória escolhida validou o papel dos saberes não matemáticos em articulação e integração aos saberes matemáticos, cujas condições, a partir dos modelos matemáticos reconhecidos pela instituição escolar, foram determinantes no processo de estudos e, não menos importante, para a "desmagificação" do tipo de problema do investimento de capitais enfrentado pelos alunos da escola básica para delimitar a situação com matemática que pode estar associada ao modelo matemático do problema em jogo. Os modelos utilizados ou reconstruidos, em uma epistemologia funcional dos saberes, atuaram como boas "máquinas" para a produção de conhecimentos sobre o domínio de realidade questionada (Bosch, Chevallard & Gascón, 2006).

A realização da tarefa $\mathbf{T_2}$ do CIMM revelou desconstruções e reconstruções de situações com matemáticas objetivadas pelos sistemas didáticos, cujas respostas evidenciaram o uso de saberes incorporados pelos sujeitos, no sentido dos *habitus* (Bourdieu, 2002, 2013), em sua história de vida pessoal e institucional, e que foram introduzidos em articulação e integração pela dinâmica das situações enfrentadas. "Os *habitus* estão espontaneamente inclinados a *reconhecer* todas as expressões nas quais se reconhecem [...]" (Bourdieu, 2013, p. 181, grifos do autor).

[31] Fragmentos do texto: the person resorts not only to a technique, but also to a technology and a theory, which praxeological analysis has to make clear.
[32] Fragmento do texto: en la aritmética elemental, en la que el mismo pequeño discurso tiene una doble función, técnica y tecnológica, que permite a la vez encontrar el resultado pedido (función técnica) y justificar que es correcto el resultado esperado (función tecnológica).

Os *habitus* manifestados pelos sistemas didáticos, além de funcionarem como sistema de percepção, apreciação e ação, permitiram a construção de práticas com o uso da regra de três materializada pela reconstrução do modelo matemático de juros compostos, como destacou objetivamente o sistema didático $\boldsymbol{S_3}$.

Vale destacar o papel funcional da regra de três como um dos saberes mobilizado pelos sistemas didáticos para a construção de outros saberes, além de evidenciar a relatividade institucional do saber (Bosch, Chevallard & Gascón, 2006), pois, a regra de três cumpriu ora o papel de técnica para o enfrentamento de tarefas nas organizações praxeológicas, ora o papel tecnológico-teórico para produção de outras organizações praxeológicas necessárias para descortinar a situação com matemática que está associada ao modelo matemático do tipo de problema de investimento de capitais.

Essa linha de pensamento revelou, em nosso entendimento, o "confronto" de práticas entre os sistemas didáticos pelas diferentes organizações praxeológicas postas em ação, ao permitir a instauração de dinâmicas cognitivas e praxeológicas, levando ao desaparecimento de uns objetos e ao surgimento de novas qualidades de relações, remodelando assim as práticas corporificadas dos sistemas didáticos. Além disso, o confronto de práticas encaminhou, em algum sentido, a dialética antigo/novo, de acordo com Chevallard (2005), pela construção de um objeto de ensino com equilíbrio entre *passado e futuro*.

Nessa dialética, o objeto de saber aqui parafraseado pelo tipo de problema em contexto real apareceu "como *um objeto com duas caras contraditórias entre si*" (Chevallard, 2005, p. 77, grifos do autor, tradução nossa). No primeiro momento como *algo novo*, com certa abertura para explorar os conhecimentos já incorporados pelos sistemas didáticos e, no segundo momento, o mesmo apareceu como um objeto antigo, mediante o reconhecimento dos alunos de alguma situação com matemática pelo domínio cognitivo, isto é, pelos seus *habitus*, estrutura predisposta a ser mobilizada frente a uma situação.

Em última análise, pressupomos que a MM escolar deve considerar ampla variedade de contextos de situações que permita aos alunos a incorporação de situações com matemática, tendo em vista as observações de Blum (2015, p. 84, tradução nossa) ao "não podermos esperar qualquer transferência mística de um exemplo ou contexto para outro"[33].

Assim, é preciso considerar que todo problema em contexto real ou não, pode operar sob condições linguísticas específicas, cujos gêneros textuais, são igualmente, indispensáveis para a bagagem cultural dos alunos como "modelos correspondentes a formas sociais

---

[33] Fragmentos do texto: *cannot expect any mystical transfer from one example or context to another.*

reconhecíveis nas situações de comunicação em que ocorrem" (Coutinho, 2004, apud Marcuschi, 2008, p. 84).

Referências

Barquero, B., Bosch, M., Gascón, J. (2007). Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitárias. *communication au 2 e congrès TAD*, Uzès.

Barquero, B. (2020). Introduction to 'Research on the teaching and learning of mathematical modelling: Approaches for its design, implementation and analysis'. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, p. 1–4.

Barquero, B., Jessen, B. E. (2020). Impact of theoretical perspectives on the design of mathematical modelling tasks. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, p. 98–113.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: Cho, S. J. (ed.). *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Dodrecht: Springer, p. 73-96.

Blum, W., Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v. 1, n. 1, p. 45-58.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 2, p. 86-95.

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19/1, p. 77-124.

Bosch, M., Chevallard, Y., Gascón, J. (2006). Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Bosch, M., Gascón, J. (2010). Fundamentos antropológicos das organizações didáticas: das "oficinas de práticas matemáticas" às "rotas de estudo e pesquisa". In: Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade Ladage, G. C. (ed.) *Difusor los Mathematiques (et les autres savoirs) comme d'outils de connaissance et acção*. Montpellier, França: IUFM de l'Académie de Montpellier, p. 49-85.

Bourdieu, P. (2004). *Coisas ditas*. Tradução: Cássia R. da Silveira e Denise Moreno Pegorim. São Paulo: Editora Brasiliense.

Bourdieu, P. (2013). *O senso prático*. Trad. Maria Ferreira. Coradini. 3. ed. – Petrópolis, RJ: Vozes.

Bourdieu, P. (2002 [1972]). *Esboço de uma teoria da prática*: precedido de três estudos de etnologia kabila. Oeiras: Celta.

Bourdieu, P. (1996). *Razões práticas*: sobre a teoria da ação. Tradução: Mariza Correa. Campinas-SP: Papirus.

Brady, C. & Lesh, R. (2021). Development in Mathematical Modeling. In: Suh, J. M, Wickstrom, M. H, & Inglês, L. D (eds) *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners*. Learning and Development of Early Mathematics. Springer, Cham, p. 95-110. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6_5.

Brousseau, G. (1995), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. Dans: Noirfalise R. et Perrin-Glorian M. J., *Actes de la VIIIe Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Fd, p. 3-46.

Cevikbas, M., Kaiser, G., Schukajlow, S. (2021). A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: state-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. *Educ Stud Math*.
Chevallard, Y. (1999). L'analise des pratiques enseignantes em theórie anthopologique Du didactique, recherches em didactiques des mathematiques. Grenoble. La Pensée Sauvage Éditions, v. 19.2, p. 221-265.
Chevallard, Y. (2013a). Sobre a teoria da transposição didática: algumas considerações introdutórias. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, v.3 n.2, p. 1-14.
Chevallard, Y. (2019b). Introducing the anthropological theory of the didactic: an attempt at a principled approach. *Hiroshima journal of mathematics education* - 12: p. 71-114.
Chevallard, Y. (2020). Some sensitive issues in the use and development of the anthropological theory of the didactic. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v.22, n. 4, p. 13-53.
Chevallard, Y. (2013b). *Éléments de didactique du développement durable* – Leçon 1: Enquête codisciplinaire & EDD.
Chevallard, Y. (2009b). La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et élémentos de réponses à partir de la TAD. In: Margolinas, C. et al. (org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). *Recherches em Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 81-108.
Chevallard, Y. (2009a). *La TAD face au professeur de mathématiques*. UMR ADEF, Toulouse.
Chevallard, Y. (2005). *La Transposición Didáctica*: del saber sabio al saber enseñado. 2. ed. 3. reimp. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.
Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college. Troisième partie. Voies diattaque et problemes didactiques. *Petit X*, n. 23, p. 5-38.
Chevallard, Y. (2019a). On using the ATD: Some clarifications and comments. *Educ. Matem. Pesq*., São Paulo, v. 21, n.4, p. 1-17.
Cristensen, O. R., Skovsmose, O., Yasukawa, K. (2008). The Mathematical state of worldexplorations into the characteristics of mathematical descriptions. *Alexandria - Revista de Educação em Ciências e Tecnologia*, v.1, n.1, p. 77-90.
Duval, R. (2011). Gráficos e equações: articulação de dois registros. Trad.: Méricles T. Moretti. *Revemat*: Florianópolis-SC, v. 6, n. 2, p. 96-112.
Euler, Léonard. (1795). *Élémens d'algèbre*. Lyon.
Florensa, I., García, F. J., Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: Estudios de caso en distintos niveles educativos. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, p. 21–37.
Fukushima, T. (2021). The role of generating questions in mathematical modeling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, p. 1-33.
Frejd, P., Ärlebäck, J. (2011). First results from a study investigating Swedish upper secondary students' mathematical modelling competencies. In. Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Stillman, G. (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling*, p. 407–416).
Galbraith, P., Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 38, n.2, p.143–162.
Garcia, F., Gascón, J., Higueras, L., Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education*, v. 38, n. 3, p. 226-246.
Grandsard, F. (2005). *Mathematical modelling and the efficiency of our Mathematics*.
Greefrath, G., Vorhölter, K. (2016). Teaching and learning mathematical modelling: approaches and developments from german speaking countries. *ICME 13 TOPICAL SURVEY*. Cham: Springer.

Maclaurin, C. (1753). *Traité d'algèbre et de la manière de l'appliquer*. Paris.
Marcuschi, L. A. (2008). *Produção textual, análise de gêneros e compreensão*. São Paulo: Parábola Editorial.
Miwa, T. (1986). Mathematical model making in problem-solving - Japanese pupils' performance and awareness of assumptions. In. Becker, J., Miwa, T, (Eds.), *Proceedings of the U.S-Japan seminar on mathematical problem solving*, p.401–417.
Perrenet, J., Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v. 1, n. 6, p. 3-21.
Revuz, A. (1971). The position of geometry in mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, v. 4, p. 48-52.
Silva, D. P. da. (2017). *A invariável prática da regra de três na escola*. [Tese de doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas, Universidade Federal do Pará].
Sodré, G. J. M. (2021a). Mathematical Modelling and Didactic Moments. *Acta Sci.* (Canoas), 23(3), p. 96-122.
Sodré, G. J. M. (2021b). O equipamento praxeológico para o problema didático da modelagem matemática. *Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT*, Florianópolis, v. 16, p. 01-20, jan./dez.
Sodré, G. J. M. (2019). *Modelagem matemática escolar*: uma organização praxeológica complexa. [Tese de doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas, Universidade Federal do Pará].
Sodré, G. J. M., Guerra, R. B. (2018). O ciclo investigativo de modelagem matemática. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v.20, n.3, p. 239-262. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i3p239-262.
Treilibs, V., Burkhardt, H., Low, B. (1980). *Formulation processes in mathematical modelling*. Shell Centre for Mathematical Education.
Vorhölter, K., Greefrath, G., Borromeo Ferri, R., Leiß, D., Schukajlow, S. (2019). Mathematical Modelling. In: Jahnke, H. N., Hefendehl-Hebeker, L. (Eds.), *Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research*. p. 91-114. Springer. doi: 10.1007/978-3-030-11069-7_4.
Wacquant, Loïc. (2007). Esclarecer o Habitus. *Educação & Linguagem*.
Wittgenstein, L. (1999). *Investigações filosóficas*. Tradução: José Carlos Bruni. São Paulo: Editora Nova Cultural (Coleção Os Pensadores).
Wittgenstein, L. (1976). *De la certitude*. Paris. Gallimard.
Toda matéria. Matemática: Grandezas proporcionais. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/grandezas-proporcionais-grandezas-diretamente-inversamente-proporcionais/. Acesso em 10 de dezembro de 2020.