



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE FÍSICA

KEPLER E AS LEIS DO MOVIMENTO PLANETÁRIO

Belém – Pará
Setembro de 2014



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE FÍSICA

Kepler e as Leis do Movimento Planetário

Rafael Bruno e Silva
Orientador: Prof. Dr. Rubens Silva

Belém – Pará
Setembro de 2014

Kepler e as Leis do Movimento Planetário

Rafael Bruno e Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Física da Universidade Federal do Pará (UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Licenciado Pleno em Física.

Orientador: Prof. Dr. Rubens Silva

Banca Examinadora

Prof. Dr. Rubens Silva (orientador)

Prof. Dr. Klaus Cozzolino

Prof. MSc. José Luiz

Belém – Pará

Setembro de 2014

DEDICATÓRIA

*COM MUITO AMOR E CARINHO
DEDICO ESTA MONOGRAFIA À
MINHA FAMÍLIA, EM ESPECIAL,
À MINHA MÃE, À MINHA NAMORADA E
AOS MEUS AMIGOS DE CURSO.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter proporcionado este momento em minha vida e ter me dado à oportunidade de viver coisas tão maravilhosas como esta.

À minha mãe, Maria do Socorro e Silva, que sempre me incentivou a estudar, pois ela acredita que a educação pode transformar nossas vidas.

A meus irmãos, Givanildo Clébson da Silva, Givanilde Cristina da Silva e Raylene Lilian da Silva, pelo amor que sempre demonstraram por mim e por ter me apoiado a sempre buscar cada vez mais e pelo imenso carinho.

À minha namorada, Lana Ferreira Dias, pelo apoio moral que sempre me deu, mesmo ainda sendo amigos e pelo grande amor que tem por mim.

A meus amigos Leonardo Moura de Sousa, Leonan Moura de Sousa e Juliana Moura de Sousa pelo incentivo de continuar estudando e pelo apoio moral.

A meus irmãos em Cristo da PIB Icuí e da ICEBIcuí, pelas orações e incentivo de continuar estudando e pelo apoio moral.

Ao prof. Dr. Sérgio Vizeu, pela tutoria e pelo grande amigo que se tornou ao longo de três anos de trabalho conjunto.

Ao prof. Dr. Rubens Silva, pela orientação e pelo grande amigo que se tornou ao longo do curso.

Aos meus amigos da turma 094-2010, que ao longo destes quatro anos compartilhamos de várias histórias, e nos tornamos símbolo de uma turma guerreira e unida, agradeço a todos vocês. Em especial: Cássio Iago, Lerika Poll Tiago Tavares.

Aos meus companheiros do PET Física Isaac Torres, Ari Patrick, Eduardo Pontes, Anderson Almeida, Álvaro Coelho, Joás Venâncio, Edson Cezar, Maico Almeida.

Agradeço a todos sem os quais este trabalho não se realizaria.

Resumo

Durante séculos, grandes nomes da ciência tentaram desvendar os mistérios envolvidos nos céus, para isso de simples teorias sem nenhum fundamento experimental até as teorias criadas a partir de análises observacionais. Teoria e modelos de universo, tais como, o geocêntrico e do heliocêntrico, homens que foram fundamentais para evolução da astronomia, como Cláudio Ptolomeu, Nicolau Copérnico, Galileu Galilei e Tycho Brahe, esses homens foram importantíssimo para que Johannes Kepler conseguisse encontrar as *“Leis do movimento Planetário”*, essas que são conhecidas com as três Leis de Kepler, conseguem explicar com absoluta maestria tudo que acontece em todos os sistemas binários, por tamanha importância na construção de suas leis Kepler colocou seu nome na história como um dos grandes gênios da humanidade. Neste trabalho iremos estudar o desenvolvimento de suas leis, desde ideias primordiais da antiguidade até os cálculos utilizados para comprovar a veracidade das leis do movimento planetário.

Abstract

For centuries, the great names of science tried to unravel the mysteries involved in the heavens, for this simple theory without experimental basis until the theories created from observational analyzes. Theory and models of the universe, such as the geocentric and heliocentric, men who were central to the evolution of astronomy, as Claudius Ptolemy, Copernicus, Galileo and Tycho Brahe, these men were important to Johannes Kepler could find the "Laws Planetarium " movement, those who are familiar with the three Kepler's Laws, with absolute mastery can explain everything that happens in all binary systems, such importance in building their laws Kepler put his name in history as one of the great geniuses of humanity. In this paper we study the development of its laws, since primordial ideas from antiquity to the calculations used to prove the veracity of the laws of planetary motion.

Sumário

Introdução	11
1 Breve histórico da Astronomia	13
1.1 Astronomia das primeiras civilizações	13
1.2 Astronomia na Grécia Antiga.....	14
1.2.1 Filolau de Torento	15
1.2.2 Aristóteles.....	15
1.2.3 Apolônio de Perga.....	16
1.2.4 Heráclides de Ponto.....	17
1.2.5 Aristarco de Samos.....	18
1.2.6 Hiparco de Nicéia.....	19
1.2.7 Cláudio Ptolomeu.....	20
1.3 Estagnação da Astronomia.....	22
1.4 O renascimento da Astronomia.....	23
1.5 Nicolau Copérnico.....	24
1.6 Galileu Galilei.....	27
1.7 Tycho Brahe.....	28
2 A vida de Johannes Kepler	31
2.1 As primeiras caminhadas	31
2.2 Matemático provincial em Graz.....	32
2.3 <i>Mysterium Cosmographicum</i>	32
2.4 Primeiro casamento.....	34
2.5 Esperança depositada em Tycho Brahe.....	34
2.6 União com Tycho.....	35
2.7 A morte de Tycho.....	36
2.8 Matemático imperial em Praga.....	36
2.9 Estudando a órbita de Marte.....	37

2.10 Matemático provincial em Linz.....	39
2.11 Segundo casamento.....	40
2.12 O retorno para astronomia.....	40
3 Definições Importantes	42
3.1 Elipse.....	42
3.1.1 O parâmetro da elipse.....	44
3.1.2 Demonstração da equação geral da elipse.....	45
3.1.3 Demonstração da equação reduzida da elipse.....	46
3.1.4 Dedução da equação polar da elipse.....	47
3.2 Operações com Vetores.....	49
3.3 Força Gravitacional.....	51
3.2 Momento de uma força.....	51
3.3 Momento Angular.....	52
3.4 Principio da conservação da quantidade de movimento.....	52
3.5 Equação do movimento relativo de dois corpos.....	53
3.6 Principio da conservação do momento angular.....	54
4 As Leis de Kepler	56
4.1 Primeira Lei.....	57
4.2 Demonstração da primeira lei.....	58
4.3 Segunda Lei.....	59
4.4 Demonstração da segunda lei.....	60
4.5 Terceira Lei.....	63
4.6 Demonstração da terceira lei.....	64
Considerações Finais	67
Referências Bibliográficas	68

Lista de Figuras

1.1	Representação da astronomia dos Semerianos.....	13
1.2	Modelo astronômico de Filolau	15
1.3	Sistema astronômico de Heráclides	17
1.4	Sistema heliocêntrico de Aristarco.....	17
1.5	Modelo planetário de Ptolomeu.....	19
1.6	Modelo deferente epiciclo.....	19
1.7	Modelo heliocêntrico de Copérnico.....	23
1.8	Sistema planetário de TychoBrahe.....	26
2.1	A taça de Kepler.....	34
3.2	Elipse.....	42
3.2	Equação geral da elipse.....	45
3.3	Equação reduzida da elipse.....	46
3.4	Equação polar da elipse.....	47
3.5	Momento de uma força em um plano.....	48
4.1	Leis das orbitas.....	54
4.2	Leis das áreas.....	57
4.3	Área varrida pelo planeta.....	58
4.4	Área do produto vetorial.....	58
4.5	Metade da área do paralelogramo.....	59
4.6	Demonstração do torque nulo.....	60

Introdução

O céu é um dos objetos de maior contemplação do homem, desde os primórdios da humanidade já se observava o quão fascinante é esse enorme céu, buscando entendê-lo e decifrá-lo, com seus astros luminosos e gigantescos cativavam a todos que o olhava, porém ao mesmo tempo despertava uma imensa curiosidade de tentar descobrir como esse gigante funcionava.

Com o decorrer dos anos muitos nomes construíram meios capazes de decifrar esse enigma da mente humana. No início o estudo dos céus e de seus astros era feito pelos filósofos naturais, com o passar do tempo pessoais foram se especializando nesse ramo da filosofia natural, e com esse progresso criou-se uma nova ciência responsável pelo estudo exclusivo do céu e dos imensos astros nele inserido, nomeou-se a nova ciência de Astronomia.

O desenvolvimento da nova ciência possibilitou a criação de hipóteses que para época era um grande avanço, grandes astrônomos surgiram, com eles equipamentos que foram criados e utilizados para testar as hipóteses já existentes e a criação de novas hipóteses e teorias.

No desenrolar da história surgiram grandes nomes na astronomia que foram responsáveis pela consolidação dessa ciência, nomes esse como *Cláudio Ptolomeu*, *Nicolau Copérnico*, *Galileu Galilei*, *Tycho Brahe* e *Johannes Kepler*. Todos cientistas que tentaram explicar o funcionamento do universo, podemos até ousar dizer que as obras desses homens são os alicerces da astronomia atual, pois foi onde tudo começou.

Se acreditássemos em destino, poderíamos dizer que ele foi extremamente feliz em proporcionar que os dois últimos nomes citados acima pudessem trabalhar juntos.

Tycho e Kepler, o primeiro um excelente observador dos céus e dedicou sua vida ao estudo do comportamento dos astros celestes, o outro um fantástico matemático e união dos dois possibilitou a marcação de seus nomes na história da astronomia.

Kepler antes de conhecer Tycho, já havia tentado explicar o universo, entretanto não tinha obtido êxito, e sabia que o único meio de conseguir isso era unir-se a Tycho devido ao enorme acúmulo de observações, isso é deixado claro no transcrito abaixo, retirado de uma carta de fevereiro de 1599.

“Calemo-nos e escutemos Tycho Brahe, que dedicou às observações trinta e cinco anos, somente por Tycho Brahe é quem espero; ele me explicará a ordem e a disposição das órbitas. Espero, então, um dia, se Deus me der vida, erguer um admirável edifício.” [1]

Hoje sabemos que esse edifício que tanto Kepler queria construir esta de pé e muito longe de ruir, e o estudaremos nesse trabalho.

Capítulo 1

Breve histórico da Astronomia

1.1 Astronomia das primeiras civilizações

Muitos povos no decorrer dos séculos se preocuparam em fazer observações sistemáticas dos fenômenos ocorridos no céu, dentre eles podemos destacar os povos mesopotâmicos que existiram há milhares de anos. As observações feitas por esses povos tinham por objetivo verificar as posições dos astros celestes como o Sol, Lua, Planetas e das estrelas, com os registros obtidos nas observações era possível criar um horóscopo, determinar calendários e prever fenômenos como os eclipses do Sol e da Lua, além é claro de prever posições futuras desses astros.

Um grande exemplo dos povos mesopotâmicos são os Sumerianos (3000 a.c) que dedicavam suas observações voltadas para astrologia, por esse motivo eles tinham como deusa (IHANNA – Rainha dos céus) e tem seu nome ligado ao planeta Vênus.

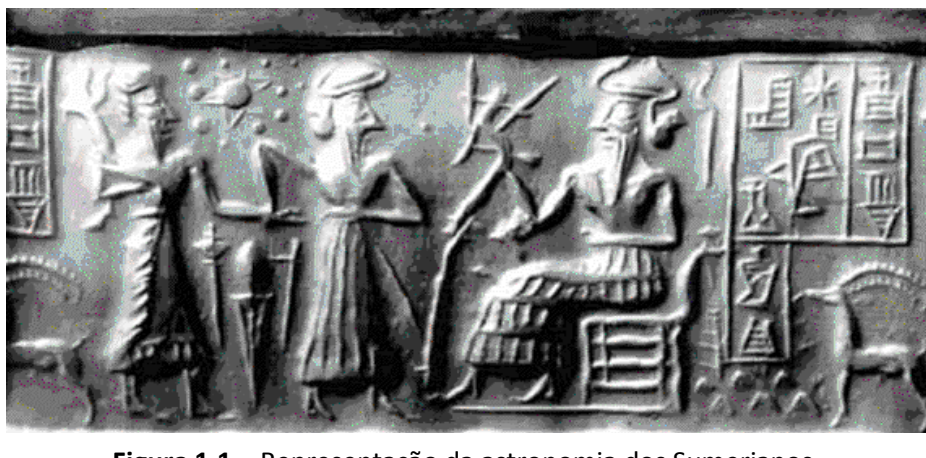


Figura 1.1 – Representação da astronomia dos Sumerianos.

Além dos povos mesopotâmicos se destacarem nas observações, outros povos já haviam registrados grande informações através de observações, especialmente os povos do Oriente Médio, dentre os quais podemos evidenciar os egípcios e os chineses.

Diferentemente dos povos mesopotâmicos, os egípcios não praticavam a astrologia por não acreditarem no caráter divinatório dos astros. Os egípcios usavam a astronomia para sua sobrevivência, pois através das observações conseguia-se saber a respeito das cheias do rio Nilo, uma vez que o Egito era banhado por esse rio, pois seu povo dependia de sua inundação anual para fertilizar a terra e assim fazer germinar as plantas e o trigo.

Entende-se que entorno do ano 3000 a.c os egípcios já haviam estabelecido o ano solar de 365 dias, e ainda conseguiram descobrir as revoluções de Mercúrio e de Vênus em torno do Sol.

Os chineses também destacaram-se nas observações astronômicas, foram os chineses que descobriram Saros, um ciclo que regula os eclipses, especialmente os Lunares e Solares. Em 2608 a.c, com o objetivo de criar um calendário que fosse confiável, foi construído um observatório pelo Imperador Houng-Ti, por eles o zodíaco foi dividido em vinte e oito constelações.

Embora os povos mesopotâmicos e do Oriente Médio tenham conseguido fazer os registros dos movimentos desses astros e feito grandes descobertas, pelo que se sabe, não foi possível que por eles fosse elaborado um modelo que pudesse explicar os movimentos descobertos, isso só começou acontecer na Grécia Antiga.

1.2 Astronomia na Grécia antiga

Nesse período da historia foi onde se começaram a criar modelos que pudessem explicar os movimentos dos astros celestes, o primeiro modelo que podemos destacar é o de Anaximandro de Mileto (610 – 547), ele descreveu os planetas sendo bolas de fogo girando em torno da Terra e representou o céu como sendo uma esfera completa, no entanto para Anaximandro a Terra tinha forma cilíndrica e repousava sobre o eixo orientado no sentido Leste-Oeste.

Podemos nos prender também as ideias do filosofo natural Tales de Mileto (634-546), este por sua vez acreditava que a Terra era plana e assim flutuava no Ar, sendo o ar sua principal substância.

Alguns dos filósofos naturais da Grécia antiga precisam de uma análise especial, e assim faremos daqui em diante, filósofos como *Filolau*, *Pitágoras*, *Heráclides*, *Aristarco*, *Hiparco* e *Ptolomeu*.

1.2.1 Filolau de Torento

Segundo suas ideias a Terra rolava no espaço, girava durante vinte e quatro horas em torno de uma fogueira central, cuja tal era estacionária e não era o Sol. Segundo ele não éramos queimados, porque existiria um planeta invisível chamado “*Antikhthon*” ou “*Antiterra*” entre a Terra e o fogo, e isso era nossa proteção.

Os outros astros como Sol, a Lua e os cinco planetas girariam em orbitas concêntricas em torno da fogueira central. Por cima de tudo isso existia uma esfera onde ficariam as estrelas. Além disso, existia o fogo superior que só era possível ver por causa de uma janela existente na esfera, essa janela era o Sol. As posições do Sol e Terra nas suas trajetórias em torno do fogo dariam os dias e as noites.

Embora hoje saibamos que esse sistema esteja incorreto, foi com essa concepção que Filolau tornou-se o primeiro filósofo natural a atribuir o movimento de translação ao nosso planeta sobre um ponto qualquer, no seu modelo colocou a fogueira. Por esse motivo seu modelo pode ser considerado o primeiro heliocêntrico.

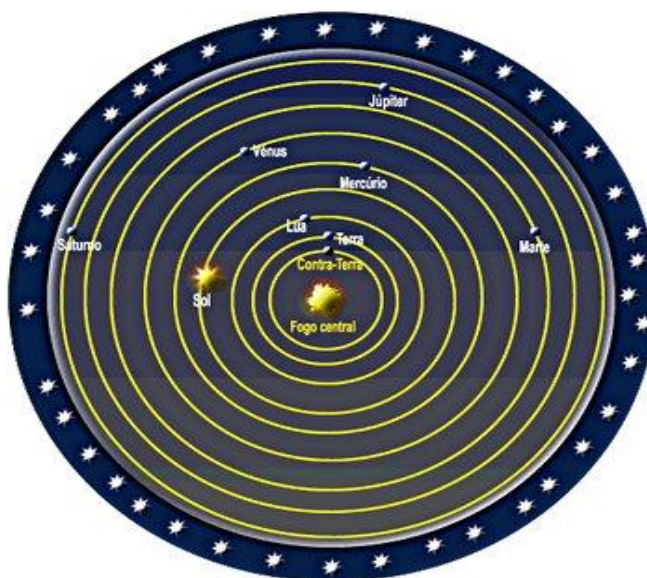


Figura 1.2 – Modelo astronômico de Filolau

1.2.2 Aristóteles

Aristóteles nasceu em Estagira na Grécia, seguiu para Atenas onde se tornou discípulo de Platão. Onde idealizou o universo tendo a forma esférica, isso porque acreditava que a esfera era o sólido perfeito e poderia girar sobre o próprio eixo no espaço que ocupa.

Entre muitas ideias, afirmou que a Terra era o centro do universo, de forma convicta que ele acreditava que os corpos celestes moviam-se em círculos perfeitos e uniformes. Dessa forma ficou difícil criar-se um desenho astronômico segundo as ideias aristotélicas, pois se tratava de um sistema que tinha círculos girando sobre outros círculos, fazendo-se de difícil compreensão. O universo rotatório de epiciclos, tornou-se fantástico e incompreensível ao mesmo tempo, entretanto o sistema acabou funcionando por muitas vezes e serviu para prever as posições das estrelas e dos planetas e auxiliou na navegação, além de criação de horóscopos.

Acreditava-o que as estrelas eram esféricas e não se movimentavam individualmente, seus movimentos eram sempre em conjunto, sendo responsável a esfera das estrelas. Em sua concepção a Terra estava no centro do universo imóvel sendo rodeada por nove esferas concêntricas e transparentes. Dizendo que a primeira esfera era constituída pela Lua, a segunda por Mercúrio e Vênus, e seguida pelas esferas do Sol e dos planetas Marte, Júpiter e Saturno, a oitava esfera era das estrelas fixas, e a nona e última era constituída por Deus que era o motor e imprimia o movimento a todo sistema.

Esta era a base Aristotélica, quer por muitos anos provocou uma estagnação no desenvolvimento científico, esses conceitos foram difundidos até o início do renascimento. Sua concepção de universo e seu funcionamento perduraram no pensamento humano por dois mil anos, transformando-se em um dogma eclesiástico.

1.2.3 Apolônio de Perga

Apolônio nasceu em 262 a.c na cidade de Perga, ao sul do que hoje é a Turquia. Sabe-se pouco sobre sua vida, somente que foi grande matemático e astrônomo. Foi para Alexandria ainda jovem e tornou-se professor foi discípulo de Euclides. Desenvolveu trabalhos com números irracionais, mas sua obra mais foi o trabalho com secções cônicas, curvas que são parábolas, a hipérbolas e elipses, curvas essas que seriam fundamentais para Kepler e Newton.

Interessou-se nos estudos dos movimentos planetários, em seus estudos criou seu modelo astronômico conhecido como “epiciclo-deferente”, o qual o planeta tem movimento uniforme ao longo do menor círculo (epiciclo), em que seu centro movia-se sobre o maior círculo (deferente), cujo qual tinha seu centro na Terra.

No seu modelo, considerou os planetas orbitando em torno do Sol, e o Sol orbitando em torno da Terra, criando um modelo muito parecido com o que seria formulado dezoito séculos depois por Tycho Brahe, Apolônio deveria ser amante particular dos movimentos executados pela Lua, pois seus alunos o chamavam-no de épsilon que tem semelhança com a Lua crescente.

1.2.4 Heráclides de Ponto

Foi contemporâneo de Filolau, descartou as idéias criadas por seu contemporâneo como a do fogo central e o planeta invisível, mas permaneceu com a ideia de movimento de Terra em torno do seu próprio eixo, consolidando as ideias de dia e noite. Aceitou as estrelas como fixas, pois observou que elas não mudavam suas posições com relação a Terra e em relação a elas mesmas, concluiu que única explicação seria elas orbitarem nosso planeta com mesma velocidade.

Observou irregularidades nas orbitas dos planetas Vênus e Mercúrio, em relação a Terra, na qual segundo seu sistema deveria ser o centro das orbitas. Conseguiu perceber que os dois planetas não deixavam de estar ao lado do Sol, num momento estava na frente e em outro atrás do Sol, logo ele associou o movimento dos planetas ao Sol e não a Terra.

Formulou um novo modelo “geoheliocêntrico híbrido”, segundo o qual esses dois Planetas orbitava em torno do Sol e esta, juntamente com os demais planetas giravam em torno da Terra que também girava em torno do seu eixo de oeste para leste.

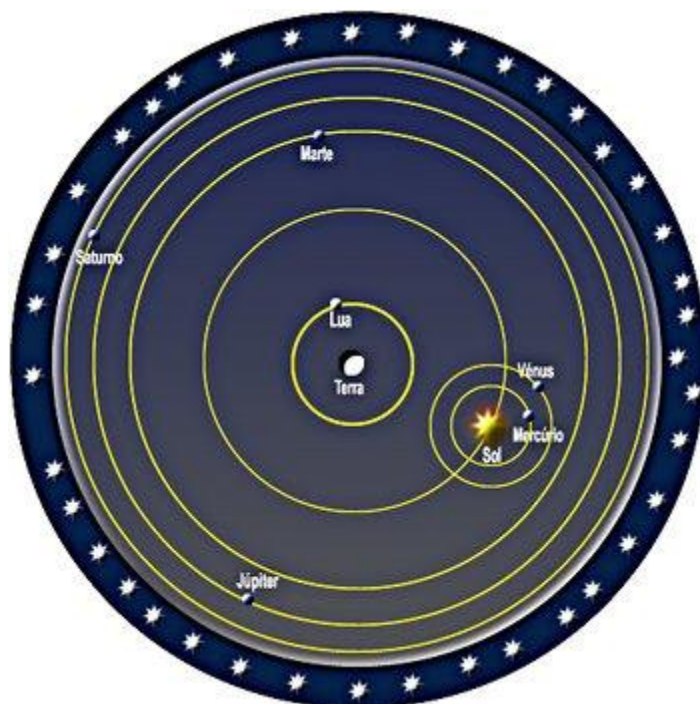


Figura 1.3 – sistema astronômico de Heráclides.

1.2.5 Aristarco de Samos

Aristarco foi o último grande astrônomo pitagórico, mas o desenvolvimento de seus trabalhos deixou-nos grandes contribuições como os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua, que apresentou métodos capazes de calcular a distância do Sol e foram muito usados até a idade média.

Foi o primeiro astrônomo a tirar a Terra do centro do universo e colocar o Sol nessa posição, a Terra passou a ser um simples planeta girando em torno de si. Os únicos astros a permanecerem imóveis foram a Lua e as estrelas.

Infelizmente seus trabalhos foram perdidos no decorrer do tempo, grandes pensadores fizeram menção a suas idéias, é o caso de Arquimedes de Siracusa em sua obra *“A Ampulheta”*.

Suas idéias eram ensinadas na época pelo próprio Aristarco, o modelo foi aceito por estudiosos antigos, mas sua idéia geocêntrica não durou muito tempo.

Ele afirmava que a imobilidade das estrelas era consequência da imensa distância entre as estrelas e a Terra, que a translação do nosso planeta se tornava desprezível.

Aristarco foi capaz de explicar os erros nos movimentos planetários. Entretanto, essa sua ideia não foi aceita.

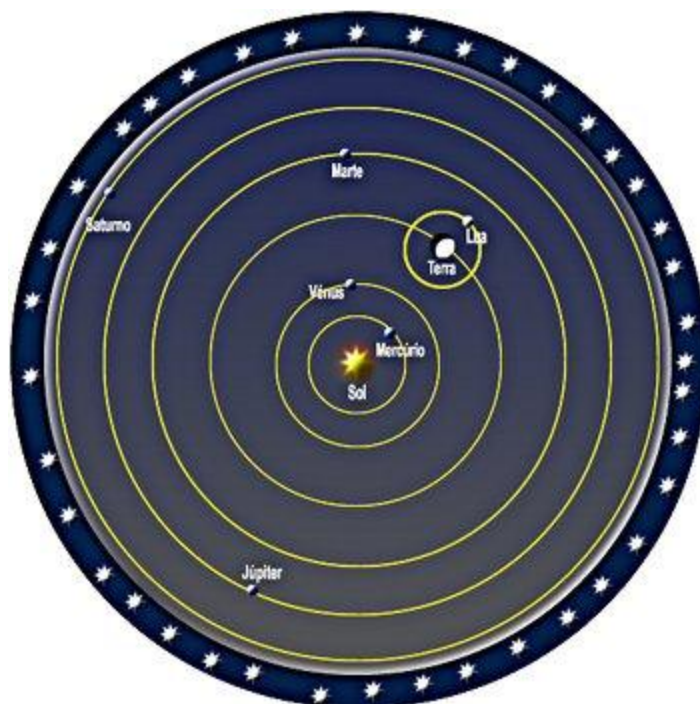


Figura 1.4 – Sistema heliocêntrico de Aristarco

1.2.6 Hiparco de Nicéia

Hiparco passou quase toda sua vida em Rodes, mas pouco se sabe sobre ele. As poucas informações que temos sobre seus trabalhos foram indicadas por Ptolomeu em seu *Almagest*.

Foi um dos maiores astrônomos da Grécia antiga, pois proporcionou grandes contribuições na determinação dos movimentos planetários, comportamento das estrelas fixas, duração do ano e distancia do Sol e de Lua, ainda elaborou um catalogo estelar onde registrou cerca de 1080 estrelas.

Nas suas observações descobriu a precessão dos equinócios, talvez por erro de calculo chegou ao valor de 36" por ano de deslocamento, bem longe do valor correto que é cerca de 50". Os instrumentos utilizados por ele eram a esfera armilar, o mostrador circular e dioptra, e ainda o instrumento criado pelo próprio chamado de astrolábio plano, que consiste num disco com um mapa móvel do céu.

Destacou-se também na determinação das distancias entre o Sol e a Lua, assim como no tamanho desses astros. Para isso utilizou-se do eclipse total do Sol, observando o eclipse em dois locais diferentes e no mesmo meridiano, em Helesponto a Lua cobriu totalmente o Sol, mas em Alexandria somente cerca de 80% da área do Solar, com isso Hiparco concluiu que a Lua estava mais próxima da

terra do que o Sol. Conseguiu dar melhor precisão a tudo que se relaciona com astronomia, facilitando os trabalhos realizados por Ptolomeu séculos mais tarde.

1.2.7 Cláudio Ptolomeu

Passaram-se quase 300 anos sem progresso nenhum na astronomia, até surgir Ptolomeu que seria ultimo grande astrônomo de Alexandria. Ptolomeu desenvolveu um celebre trabalho denominado como “*Syntaxis Mathematica*” (*Coleção Matemática*), uma coleção composta por 13 livros relacionados a astronomia, foi traduzido pelos árabes no século IX, e foi nomeado por “*Almagest*”.

Utilizando como ferramenta trigonometria esférica, em seu trabalho abordou assuntos como a esfericidade da Terra, o seu sistema geocêntrico de epiciclos, teoria das elipses e um catalogo com 1028 de estrelas fixas. Ptolomeu acabou herdando uma astronomia sem respostas, que era um tanto instável e balançava entre os conceitos aristotélicos e as observações reais.

Ao construir seu modelo planetário de caráter geocêntrico, primeiramente criou uma grande esfera das estrelas fixas que carregava o céu para o oeste em volta da Terra, dentro dessa esfera estavam contidos os planetas inclusive o Sol e Lua. Para isto utilizou um modelo de epiciclo e deferentes, onde esses planetas giravam em torno da Terra, cada planeta no círculo maior de nome “deferente” através de círculos menores chamados de epiciclos, dessa forma explicou o movimento retrógrado dos planetas.

Desenvolveu uma hipótese para observações que indicavam orbitas planetárias não circulares, criou assim deferentes cujos centros se moviam num círculo, o excêntrico móvel. Dessa forma o centro do grande círculo já não coincidia com Terra e sim num círculo próximo dela e assim conseguiu explicar porque os planetas as vezes pareciam grandes e outras pequenos. O sistema de Ptolomeu foi complicando cada vez mais, pois cada vez mais círculos eram necessários.

No Almagest apresentou além de seu sistema planetário, um catalogo de estrelas baseados nos trabalhos feitos por Hiparco, listou 48 constelações cujo nome dados às mesmas perduram ate hoje e construiu instrumentos que ajudaram muitos outros astrônomos.

Acreditava numa Terra redonda, que estava suspensa no espaço sem nenhuma sustentação, idéia um tanto absurda para época, a crença do homem

comum era numa Terra plana com colunas de sustentação. Passou quarenta anos lutando com seu próprio sistema, a fim de conseguir credibilidade passou seu trabalho ao público e assim seus conceitos passaram a ser definitivos para o homem comum, simplesmente por explicar o porquê o Sol aparece pela manhã e viaja no espaço durante o dia até chegar a noite, e mesmo sendo considerado complicado por inúmeros círculos foi o primeiro a explicar de maneira sistemática os movimentos celestes.

Com o modelo ptolomaico encerrou-se o período grego na astronomia. Seu sistema tornou-se tão absoluto que se passaram 1400 anos sem haver nenhum questionamento, foram centenas de anos sem dúvidas, seu sistema acabou virando a visão científica, filosófica e religiosa durante todo esse tempo, por todas essas qualidades foi assimilado pela igreja católica que o transformou em um de seus dogmas irrefutável, tratando como heresia qualquer pensamento contrário a esse sistema.

Sabemos que os sistemas gregos foram errados, mas nunca poderíamos criticá-los, especialmente a Ptolomeu que apesar dos erros de seu livro, serviu para fundamentar os estudos astronômicos através de descrição matemática.

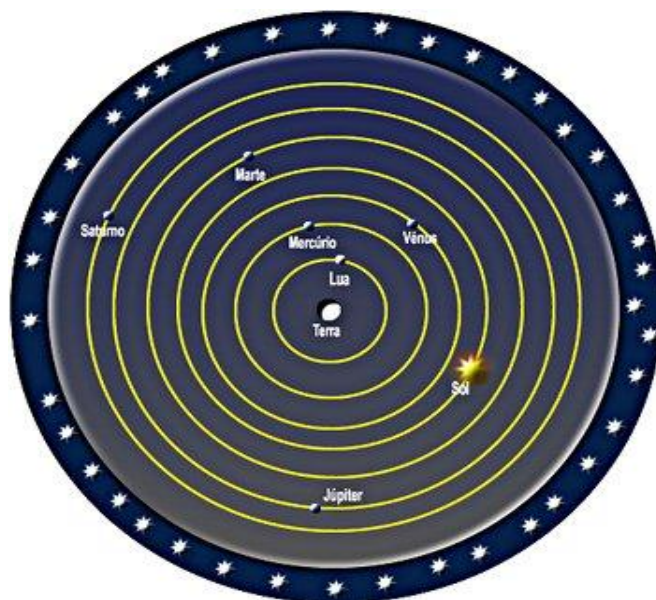


Figura 1.5 – modelo planetário de Ptolomeu

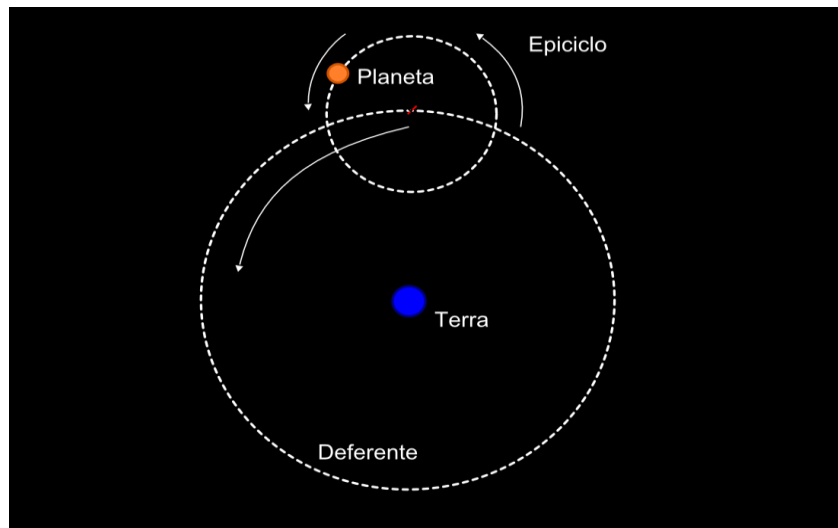


Figura 1.6 – Modelo do deferente Epiciclo

1.3 Estagnação da Astronomia

Durante um grande período da humanidade a astronomia junto com as outras ciências não sofreu nenhum avanço, acabou estagnada por um motivo basicamente religioso.

Os cristãos tinham seus conceitos ligados diretamente as escrituras hebraicas, e associava as ideias e ensinamentos gregos com a imoralidade. Com os relatos da vida, morte e ressurreição de Jesus provocou o aguçamento do monoteísmo. Jesus se tornou a ser o principio da sabedoria e passou a dirigir a humanidade e a historia.

O ensinamento cristão assimilava exatamente os conceitos deixados por Ptolomeu, pois sua teoria ia ao encontro do anseio da doutrina bíblica. Ptolomeu sendo um cientista acabou dando a igreja o alicerce que precisava para mostrar que sua doutrina estava correta.

As fundações e as bases da igreja foram expandindo-se pela Europa, todos seus dogmas, dessa maneira a ciência não tinha mais nada a responder, pois os homens, a natureza, os planetas e o universo, era simplesmente resultado da ação do senhor do universo.

Em 529 d.c, as escolas filosóficas pagãs de Atenas foram fechadas pelo Imperador Justino após enfrentarem grande oposição dos cristãos. E isso foi um crescente impressionante e todos os filósofos e cientistas se espalharam e levaram

consigo tudo que ainda restava, dispersando-se entre a Síria, Pérsia, Roma e outros lugares.

Os trabalhos gregos foram logo reconhecidos pelos árabes, criando-se em Bagdá uma escola científica. Durante esse período triste para a ciência Alexandria foi invadida por Cristãos bárbaros e foi saqueada, em outra invasão foi completamente destruída e incendiada, perdendo um grande acervo de conhecimento que infelizmente nunca foi recuperado.

Passou-se pela idade das trevas onde não existia mais filosofia, matemática, medicina, astronomia, química e ainda não existia liberdade de expressão, tudo por uma crescente ignorância. As pragas e as doenças cresceram em massa espalharam-se pela Europa provocando a morte de milhares de pessoas.

As cruzadas aconteceram nesse período da historia, onde os cristãos estavam armados para expulsar os muçulmanos de Jerusalém, a terra santa.

A igreja deu alicerce a tudo, tendo o domínio político, social e intelectual. Provocou uma cegueira e ignorância que durou até o século XV. A renascença trouxe consigo grandes nomes que contribuíram para o avanço da ciência, que derrubaram conceitos, preconceitos e abriram uma nova porta para ciência.

1.4 O Renascimento da Astronomia

O renascimento trouxe um avanço primoroso para astronomia, juntamente com todas as ciências começaram a se desenvolver. Uma revolução astronômica deu-se inicio com Nicolau Copérnico, quebrando os conceitos deixados por Ptolomeu.

Criaram-se projetos e equipamentos muito importantes para astronomia, feito por Tycho Brahe, que permitiram obter informações sobre as orbitas planetárias, e as lunetas de Galileu.

A renascença trouxe revoluções nas artes, literatura, música e nas ciências matemáticas, provocando uma colisão frontal com os dogmas criados e instituídos pela igreja.

No século XVI, viu-se na renascença as grandes navegações e a descoberta do novo mundo por Colombo, passou-se nessa época também Lutero rebelar-se contra a igreja católica dando inicio a revolta protestante e a igreja católica combater essa revolta com a contrarreforma

Até a renascença as ideias Ptolomaicas eram a lógica aceita, a incontestada estrutura do universo, até o polonês Copérnico criar a nova concepção do universo.

1.5 Nicolau Copérnico

Polonês nascido na cidade de Thonn, em 1473. Era um clérigo, e acima de tudo um homem que buscou libertar-se dos conceitos ignorantes do catolicismo e passando pelo período do renascimento, foi um dos principais personagens de uma revolução que estava iniciando.

Viveu no período áureo do renascimento e foi contemporâneo de grandes nomes como Martinho Lutero, Leonardo da Vinci, Michelangelo, Cristovam Colombo, entre outros. Conseguiu romper com os conceitos da astronomia medieval com a era moderna.

Aos 18 anos foi enviado para a Universidade da Croácia, uma das famosas do norte da Europa, destacou-se no ensino de matemática e astronomia. Anos depois se tornou cônego de frauenburg, posição de privilégios. Foi para Itália estudar direito canônico e nas horas vagas estudava filosofia, medicina e grego, assim logo se apaixonou pela astronomia e por volta do ano 1500 já dava palestras para plateias selecionadas.

Nesse período aconteceram suas primeiras observações astronômicas em Bolonha. Logo no fim dos estudos na Itália ouviu sobre os estudos de Aristarco. Vindo da Itália foi morar com o tio por seis anos, nesse período começou a desenvolver seus trabalhos, fazendo um esboço do seu modelo de universo, o *“Nicolai Copernic de hypothesis motuum coelestium a se constatutis commentarioles”*.

Traduzido como *“Um breve esboço das hipóteses de Nicolau Copérnico Sobre os movimentos celestes”*. Livro que não foi publicado, pois ele exercia medicina e era muito mais conhecido como médico do que como astrônomo.

Copérnico viveu numa época de homens cegos e ignorantes, os cristãos estudavam obras sagradas pelas tradições, ideias absurdas apareciam como o de São Basílio que acreditava que o firmamento estava cercado de águas celestes.

Grandes dificuldades alguns homens enfrentaram para conseguir entrar em contato com a astronomia grega e propor novos conceitos, mas não tinham muito credito, pois tinha menos importância perante o evangelho. Copérnico era

conhecedor das ideias gregas de astrônomos como Filolau, Heraclito, Aristarco e Ptolomeu, sabia que já haviam colocado a Terra em movimento. Quanto mais Copérnico avançava em seus estudos mais distantes dos ensinamentos oficiais ele ficava.

Aos 40 anos, assumiu o cargo de cônego da catedral de Frauenburg, cargo esse que ocupou até o fim de sua vida. Não gostava nenhum pouco dos trabalhos de Ptolomeu, pelas explicações sendo acrescentada de círculos, portanto a astronomia clássica estava errada, dedicou-se intensamente ao seu trabalho que ficou pronto por volta do ano de 1530, mas ficou guardado.

Liberou seu “*Comentariolus*” para circular na forma de manuscrito nas mãos de amigos e eruditos desconhecidos.

Começou a hipótese do Heliocentrismo, ou seja, o centro deveria ser ocupado pelo Sol. Problemas encontrados na teoria de Ptolomeu foram rapidamente resolvidos, sem precisar dos epiciclos e equantes. O “*Comentariolus*” foi a primeira amostra do sistema copernicano que contradizia o modelo de Ptolomeu.

O manuscrito não teve a repercussão esperada, entretanto Copérnico acabou desfrutando de certo prestígio e notoriedade entre os acadêmicos por cerca de 30 anos, isso sendo conquistado sem nenhuma publicação. Em 1524, recebeu elogios do secretário do Papa Leão X por seu sistema, anos depois um cardeal de confiança do Papa solicitou a Copérnico que divulgasse suas ideias em forma impressa, porém mesmo com todos os elogios e resguardo dado a ele, optou em não publicar com medo de exposição ao ridículo por não conseguir provar seu sistema.

Copérnico sempre hesitou em publicar seu livro, mas tinha seus motivos e sua insegurança é compreendida. Anos antes da publicação de seu livro, Lutero ao ler seu *commentariolus*, já ofendia Copérnico “o novo astrólogo quer provar que a Terra gira”, e outros reformadores, como Calvino tentava proibir sua obra por considerar heresia.

Com a insistência de um jovem chamado Rheticus, Copérnico aceitou fazer a publicação. Pediu a Rheticus que se dedicasse a estudar o seu trabalho e depois escrevesse um resumo do seu conteúdo, mas pediu para não mencionar seu nome na página do título, e deveria colocar somente o sábio Dr. Nicolau de Torun.

Dez semanas depois o resumo ficou pronto, em fevereiro de 1540 estava pronto a primeira impressão. A publicação deste trabalho provocou um fervor nas

mentes mais estudiosas da época, e acabou aumentando a pressão sobre Copérnico para publicação completa do seu trabalho.

No verão de 1540, Copérnico decidiu publicar o livro e Rheticus começou a copiar integralmente o manuscrito. Em 1543, sua obra denominada *“Revolutionibus orbium coelestium”* foi publicada, conta-se que Copérnico teve o privilégio de ter uma cópia de sua obra em mãos no leito de morte, dado a ele por um amigo na “revolução das orbitas celestes”, Nicolau estava muito doente foi vítima de uma hemorragia cerebral e ficou com paralisia parcial e em 24 de maio de 1543 Copérnico faleceu, o primeiro grande astrônomo a desafiar conceitos em 1500 anos.

Em sua obra descreveu o universo finito, limitado pela esfera das estrelas fixas, o Sol ocupava o centro do cosmo e estava imóvel e em seu redor orbitava, sucessivamente os planetas Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, e Saturno, e a Lua orbitava em torno da Terra, e colocou a Terra em movimento em torno do seu eixo.

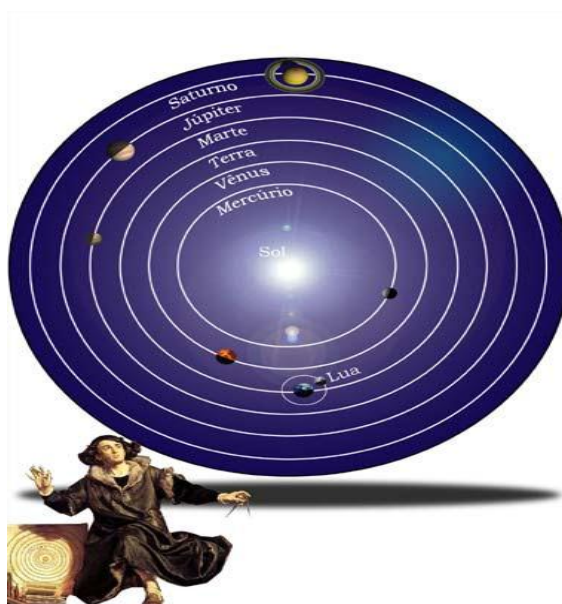


Figura 1.7 – Modelo heliocêntrico de Copérnico

Apesar de muitos erros, o modelo de Copérnico tornou-se referência para cálculos de novas tabelas astronômicas e ainda lhe deu o título de “segundo Ptolomeu”. Era clara que a explicação do modelo de Copérnico era superior da teoria de Ptolomeu, a partir do seu modelo nunca mais se viu a Terra como sendo o centro do universo.

Seu modelo mesmo sendo contrario a igreja, não levantou de imediato a ira dos lideres religiosos, pois a obra foi pouca divulgada, isso só ocorreria 75 anos depois com Galileu que era adepto a ideia de Copérnico, dessa forma o livro de Copérnico entraria no ÍNDEX de livros proibidos pela igreja. Entretanto, já era um pouco tarde, a semente já havia sido plantada e o modelo heliocêntrico foi ganhando inúmeros adeptos, dentre eles Kepler.

1.6 Galileu Galilei

Galileu nasceu em 15 de fevereiro de 1564, na cidade de Pisa na Itália. Grande cientista que se destacou na mecânica, com 21 anos publicou o ensaiador que era um trabalho descritivo de sua invenção, a balança hidrostática. Aos 25 anos desafiou as ideias aristotélicas sobre a queda dos corpos com a famosa experiência na torre de Pisa. Em 1597, Galileu escreveu uma carta à Kepler, proclamando acreditar nas ideias de Copérnico, poucos eram comunicados das ideias de Galileu sobre as suas teorias do movimento dos corpos.

Com a morte de Giordano Bruno que havia sido queimado na fogueira, Galileu talvez comovido pela situação, começou a pronunciar publicamente resumos da teoria copernicana, logo vieram os questionamentos sobre tais ideias, especialmente sobre a retirada da Terra do centro do cosmo.

Numa viagem para Veneza em 1609, Galileu ficou sabendo que um óptico holandês havia inventado um instrumento que fazia os objetos ficarem maiores e mais próximos, tal invenção foi chamada de Luneta. Seu criador via apenas como um simples brinquedo, porém para Galileu era a oportunidade de desvendar os mistérios dos céus. A luneta consistia em colocar duas lentes juntas, em pouco tempo Galileu já estava com sua própria luneta, cuja conseguia aumentar três vezes os objetos observados, o gênio começou a aprimorar o instrumento e conseguiu um aumento de oito vezes, melhorando cada vez mais e criando lunetas cada vez mais potentes.

Apontando seu instrumento para a Lua verificou que ela tinha uma superfície rugosa, cheia de crateras e isso quebrava as ideias de Aristóteles que defendia a Lua como possuidora de uma perfeita esfericidade. Voltando sua luneta para Júpiter, observou o planeta por um longo período e teve como resultado de sua observação à verificação de quatros astros aparecendo e desaparecendo, concluiu então que

Júpiter possuía quatro luas, da mesma forma que a Terra tinha uma, essas luas passaram a serem chamadas de satélites galileanos.

Suas primeiras observações com a luneta foram publicadas em 12 de março de 1610 num livro com apenas 24 páginas com o nome de “*Sidereus Nuncius*” (mensageiro das estrelas).

Galileu ainda apontou sua luneta na direção de Vênus e observou que o planeta apresentava fases assim como a Lua terrestre, para Galileu essa era a confirmação de que os demais planetas giravam em torno do Sol. É possível dizer que Galileu conseguiu abalar as tradições gregas da ciência.

1.7 TychoBrahe

Tycho nasceu na Esconia, província dinamarquesa na época, em 14 de dezembro de 1546. Foi criado por seu tio rico George Brahe, gozou de uma vida farta e aos 13 anos ingressou na universidade de Copenhague.

Sua vida foi marcada por quatro eventos astronômicos, todos decisivos. O primeiro foi eclipse parcial do Sol quando tinha 14 anos e despertou no menino um grande interesse pela astronomia, principalmente pelo fato do eclipse ter sido previsto, o segundo evento foi a conjunção de Júpiter com Saturno que deu-se quando tinha 17 anos e lhe revelou as falhas das tabelas astronômicas, portanto existia a importância das observações sistemática para teste das teorias planetárias, aqui foi dado o pontapé para a observação sistemática do planeta Marte ao longo dos anos. O terceiro evento foi uma supernova descoberta na constelação de Cassiopéia, quando tinha 26 anos e demonstrou-lhe o céu ser mutável e iria de encontro à esfera sub lunar de Aristóteles. Em 1577, quando já estava com 31 anos observou a passagem de um cometa e isso lhe permitiu demonstrar que o astro observado estava pelo menos seis vezes mais distante da Terra do que a Lua, um golpe duro nas concepções aristotélicas.

Quando ainda estava em Copenhague aconteceu o primeiro evento, Tycho ficou fascinado e começou a dedicar-se ao estudo da matemática e da astronomia, adquiriu um exemplar básico da astronomia da época o “*almagestum*” de Ptolomeu.

Foi enviado para a universidade de Leipzig juntamente com um tutor para estudar Direito, não adiantou porque o jovem já havia se apaixonado pela

astronomia. Aos 17 anos, começou um sério estudo sobre os planetas, pois achava que a posição destes diferia muito das indicadas nos livros.

Seu tio morreu quando estava com 19 anos e Tycho herdou todos seus bens, a partir daí pode dedicar-se a sua paixão que era a astronomia e previsões. Em 11 de novembro de 1572, observou a presença de uma nova estrela na constelação de cassiopéia, após comprovar a presença da nova estrela conseguiu destruir as teorias de Aristóteles, Platão e Ptolomeu que diziam que as estrelas eram fixas e imutáveis. Dezesete meses depois de aparecer, simplesmente desapareceu sem deixar vestígios, hoje se sabe que tratava-se de uma supernova.

No ano de 1570, Brahe considerou concluída sua educação e regressou a Dinamarca e até 1574 conviveu com sua família em Copenhague. Em setembro de 1574, por solicitação do rei Frederico II, Tycho iniciou uma série de conferências sobre astronomia na universidade local. No ano seguinte passou a viajar pela Europa e visitar astrônomos em Frankfurt, Basiléia, Augsburg e Veneza.

Ao retornar a Dinamarca recebeu um convite do Frederico II, o rei lhe ofereceu Hveen, ilha com quase cinco quilômetros, onde Tycho deveria construir uma casa e um observatório com recursos da coroa. Foi assim que nasceu *URANIBURGO* (cidade dos céus), que começou sua construção em 1576 e acabou em 1580.

Enquanto *URANIBURGO* era construída, Tycho observou um cometa de brilho excepcional, esse cometa permitiu a Brahe calcular sua distância e demonstrou que não se tratava de um fenômeno sublunar, ele ainda descobriu em 12 de maio de 1582 a constelação dos Gêmeos.

Em 1584, ao sul de *URANIBURGO* foi construído um novo observatório, *ESTRELANBURGO* (cidade das estrelas). Onde as salas eram subterrâneas, evitando o vento e isso lhe permitia uma estabilidade maior do que nas torres de *URANIBURGO*.

Brahe usando suas observações criou um sistema para explicar o funcionamento do universo, publicou o livro (Sobre o mais recente fenômeno do mundo etéreo, livro dois- 1588), onde expõe seu modelo planetário pela primeira vez. Em seu modelo conservou a Terra imóvel e no centro do universo e o Sol girava ao seu redor, com os outros planetas orbitando em torno do Sol, produzindo assim a sucessão dos dias e das noites, assim como as estações do ano.

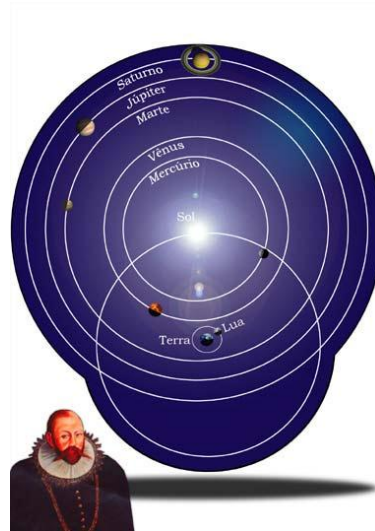


Figura 1.8 - sistema planetário de TychoBrahe

Observa-se que o modelo de tycho parece ser uma junção dos modelos de Ptolomeu e Copérnico, assim se tornou uma grande inovação, mas na verdade essa união destruiu as esferas de cristal dos sistemas antigos.

Após a morte de seu protetor Frederico II, o sucessor Cristiano IV não compartilhava das mesmas ideias e de certo modo não gostava de Tycho, com isso cortou a sua renda drasticamente e culminou com a saída do astrônomo da ilha em 1597.

Dois anos depois foi nomeado matemático imperial pelo o imperador Rudolf II, que também lhe cedeu o castelo BENATKY para morar, e foi nesse castelo que houve o encontro que mudaria a historia da astronomia, Tycho e Kepler se encontraram ali para começar uma parceria que teve como resultado as leis do movimento planetário.

O melhor observador da época, mas tinha grandes dificuldades para transformar suas observações numa teoria coerente, encontrava o melhor teórico e matemático brilhante. Kepler era o cientista que mais valorizava as observações conseguidas por Tycho.

Brahe acreditava até sua morte que seu sistema era o mais correto e assim o considerava sua obra mais importante. Sabemos hoje que sua maior contribuição foram suas observações, sua ultima publicação foi “*Astronomia Instaurata/mechanica*” (instrumentos para a astronomia restauradora- 1598), depois desta publicação passou mais três anos vivo e morreu em 24 de outubro de 1601.

Capítulo 2

Vida de Johannes Kepler

2.1 As primeiras caminhadas

Um menino nascido no dia 27 de dezembro de 1571, e foi batizado na igreja católica de São Pedro e São Paulo com o nome de Johannes Kepler.

Foi enviado para escola elementar de Leonberg em 1578, logo foi percebido seu grande potencial e foi orientado para uma escola latina, e Lá ingressou num curso onde geralmente se concluíam em três anos, porém devido a sua saúde debilitada, Kepler concluiu o curso em cinco anos. Continuou seus estudos no seminário protestante de Maubromm, num regime rígido de estudos onde havia poucas horas vagas, o seminário funcionava como um quartel ideológico e teológico. Dedicava-se aos estudos de Latim, Grego, Retóricos e Música, tudo isso conciliado longas leituras bíblicas.

Em setembro de 1589, Kepler ingressou na universidade de Tübingen. Durante cinco anos, teve uma grande grade curricular obrigatória que passava pelas áreas de Ética, Dialética, Grego, Hebreu, esférica e física, sendo no geral um excelente aluno. De todas as matérias, era a matemática que ele gostava mais, leu diversos textos de Aristóteles e apesar dos cursos de filosofia e grego lhe serem atraentes, foi fascinado pela carreira de professor de matemática e astronomia.

Seu mestre Maestlin era um grande e celebre astrônomo na época, e apesar de descrever o universo com ideias de Ptolomeu, nas suas aulas ensinava a visão da astronomia de Nicolau Copérnico. Kepler avaliou as vantagens dos dois modelos, creu com convicção nas ideias de Copérnico e em seu modelo heliocêntrico. Kepler também se tornou um perito em astrologia e elaboração de horóscopos.

2.2 Matemático provincial em Graz

Kepler concluiu seus estudos teológicos em 1594, sua vida nesse momento teve uma grande e inesperada surpresa. Com a morte do “*Mathematicus*” da Universidade protestante de Graz, a congregação local solicitou à Universidade de Tübingen que lhe fosse enviado um substituto, pela brilhante facilidade que tinha com a matéria, os olhos voltaram-se para Kepler, surpreso de início hesitou, porém após pensar nos prós e contras acabou aceitando a oferta.

Chegou a Graz no dia 11 de abril de 1594. Uma de suas funções era a criação de calendários astrológicos com previsões, em outubro do mesmo ano seu primeiro calendário foi publicado e as previsões contidas nele se confirmaram. Apesar do sucesso de seu calendário, Kepler não conseguia atrair estudantes para suas aulas, ele era muito mais popular como astrólogo do que como professor. Em seu segundo ano foi obrigado a lecionar retórica até que os alunos estivessem preparados para escutar suas lições matemáticas.

Nessas condições, Kepler dedicou-se a pesquisar sobre os movimentos planetários. Durante uma aula ao desenhar uma figura geométrica no quadro, teve uma ideia notória que consistia em associar o sistema de Copérnico com a geometria Euclidiana.

2.3 *Mysterium Cosmographicum*

Esta primeira obra de Kepler começou a ser escrita a partir da ideia tida em sala de aula. No quadro havia um triângulo com um círculo inscrito e outro circunscrito, percebeu uma proporção entre os raios dos círculos, algo se assemelhava com as orbitas de Marte e Júpiter. A partir de então tentou calcular a distância entre os planetas usando polígonos regulares.

Tal ideia não deu certo, começou a pensar nas dimensões das orbitas e partiu para a ideia de usar sólidos perfeitos, ou seja, os poliedros regulares cujas faces são idênticas. Sua ideia era encaixar entre as orbitas dos planetas os cinco sólidos regulares, o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro, e o icosaedro. Kepler acreditava na existência de uma razão divina para existir seis planetas e cinco sólidos perfeitos. Dedicou dias e noites de sua vida para comprovar sua ideia através de cálculos e assim começou sua redação do “*Mysterium Cosmographicum*”.

O *Mysterium* foi publicado em 1596, quando Kepler tinha apenas 25 anos. Desde Copérnico passaram meio século sem nenhum astrônomo retomar ideias copernicanas, nesta obra Kepler tenta estabelecer a supremacia do sistema de copernicano sobre todos os outros, mostrando que era o único sistema capaz de dar ordem ao universo construído por Deus. A obra publicada em sua juventude era apenas uma amostra do que estava por vir alguns anos mais tarde, com suas obras “*Astronomia Nova*” (1609) e “*Harmonia do mundo*” (1619).

A grande motivação de Kepler para escrever o *Mysterium* foi a ideia de existir uma razão que justificasse as diferentes distancias dos planetas ao Sol, e ainda fizesse compreender o período de revolução dos planetas. Nosso menino gênio era extremamente religioso e tentava demonstrar que Deus havia criado o mundo usando uma ordem geométrica, para isso utilizou os cinco poliedros regulares encaixando-os numa sucessão entre as orbitas planetárias.

O modelo defendido no *Mysterium* consiste na inscrição dos poliedros nas orbitas, gerando a inscrição na orbita de Saturno o cubo, na orbita de Júpiter inscreveu o tetraedro, a esfera nele contida estava a orbita de Marte e nesta estava inscrito o dodecaedro, nela encontrava-se a orbita da Terra, na qual situava o icosaedro, sendo a esfera interior a orbita de Vênus, e ali colocou um octaedro que envolvia a orbita de Mercúrio, e no centro desse sistema encontrava-se o Sol imóvel.

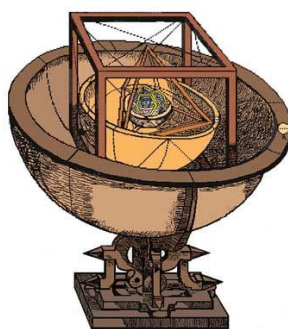


Figura 2.1 – A taça de Kepler

Kepler enviou alguns exemplares de sua obra para os sábios cientistas da época, dentre eles Galileu e Tycho Brahe, foi elogiado por ambos, Galileu lhe escreveu uma carta agradecendo e dizendo que era partidário das ideias de Copérnico a muitos anos e que já havia feito varias descobertas a partir desta hipótese, Galileu fala na carta que estava preparando demonstrações e refutação a muitos argumentos contrários, mas ainda não havia publicado com medo dos

problemas que causariam, assim como acontecera com Copérnico. Tycho concordou com a ideia de Kepler, respondeu que existiam diferenças entre as previsões do mundo e suas medidas e agradeceu o envio do livro.

2.4 Primeiro Casamento

Em dezembro de 1595, na cidade de Graz, Kepler conheceu Barbara Müller, uma jovem de 20 anos que já havia perdido dois maridos. Com um relacionamento complicado, com vários problemas, dentre eles a não concordância do Pai de Barbara, entretanto o casamento aconteceu em 27 de abril de 1597 e o casamento durou quatorze anos e gerou seis filhos.

Seu primeiro casamento foi um desastre, sua mulher era de natureza irritadiça e proferia suas vontades com voz alterada.

Em 1611, seu filho favorito faleceu, Friedrich aos seis anos, após a morte de seu filho a sua esposa sofreu uma profunda depressão, exausta pelo desespero e uma torturante saudade do filho, cheia de melancolia e no mais triste estado da alma, Barbara faleceu os trinta e seis anos, em 3 de julho de 1611.

2.5 Esperança Depositada em TychoBrahe

Tycho foi o maior astrônomo da época, escolheu um meio termo, rejeitou as ideias metafísicas de Kepler. Através de carta Tycho aconselhou a Kepler a deixar de lado as especulações e se dedicar as observações e posteriormente estudar suas causas. Brahe acreditava que Kepler deveria aplicar a concepção desenvolvida no *Mysterium* em sua hipótese Geo-heliocentrismo.

Todas as esperanças de Kepler foram depositadas em Tycho, em consequência da enorme quantidade de observações que havia acumulado, e isso é deixado claro por Kepler quando escreve a um amigo: *“Conto somente com Tycho Brahe, ele devera me comunicar as propriedades e as diferenças dos movimentos individuais dos planetas. Então, se Deus me permitir viver, eu poderei edificar uma estrutura magnífica.”* [1]

Kepler recebeu o convite de Tycho Brahe para trabalhar juntos, em Praga, onde Tycho já estava desde 1599, o imperador Rodolfo II havia lhe acolhido. O convite foi aceito, pois além de sua vontade declarada, a situação religiosa em Graz

estava insustentável, Kepler receberia um salário de 200 florins por ano no seu novo trabalho.

Logo ele percebeu a importância das observações de Tycho, passou a nutrir a esperança de um dia ter em suas mãos as observações do astrônomo dinamarquês. Sem as observações e a colaboração de Tycho, Kepler não teria conseguido elaborar as três leis do movimento planetário.

Tycho e Kepler foram duas vidas que se encontraram para o triunfo da astronomia. Tycho era um nobre aristocrata e Kepler um plebeu pobre, entretanto o tempo mostrou ter sido fundamental para a história da astronomia a associação desses dois gênios.

2.6 A União de Kepler e Tycho

Kepler chega a Praga em meados de janeiro de 1600, de onde escreveu a BENATKY. A resposta veio dias depois, frisando que o convite não era como hospede, mas como amigo e colega preocupado com a observação do céu, neste mesmo mês o grande encontro aconteceu, Kepler aos 29 anos e Tycho com 53 anos, estavam juntos para mudar a história da astronomia.

Tycho compreendia que o fim de sua vida estava chegando, sentia necessidade de ter um ajudante para analisar as observações acumuladas, e criar um modelo de cosmo, ele depositava em Kepler grande esperança, com bases nas observações pudesse traçar uma nova estrutura do Universo.

Kepler tinha como objetivo dessa viagem, além de conhecer Tycho, também conseguir os dados observacionais do astrônomo dinamarquês. Pensava que com tais informações conseguiria confirmar sua teoria do Mysterium. Ambos tinham anseio para compreender o Universo e eram Luteranos, porém as semelhanças acabavam nisso, Kepler logo percebeu que havia muita diferença entre os dois. Realmente foi um relacionamento complicado, Tycho era muito desconfiado, tinha medo de que roubassem suas observações e por isso as mantinha em constante segredo.

Das poucas informações conseguidas por Kepler, foram incrivelmente usadas para criar uma nova teoria da órbita de Marte. Kepler se impressionou com a qualidade das observações, e Brahe por sua vez ficou surpreendido pela capacidade intelectual de seu companheiro.

Em abril de 1600, houve entre os dois uma grande briga, e as negociações foram interrompidas por um intervalo de tempo, após houve uma calmaria e as coisas melhoraram e se estabilizaram entre os dois. Apesar dos problemas de relacionamento, foi nesse período que Kepler foi apresentado ao imperador Rudolf II, que designou Kepler para colaborar com Tycho nas confecções de tabelas astronômicas, tabelas essas, que foram publicadas em forma de livro por Kepler, após a morte de Tycho.

2.7 A Morte de TychoBrahe

Em 24 de outubro de 1601, Tycho encontrou-se com o destino e foi levado a um passeio que não teve mais volta. No dia 13 de outubro do mesmo ano, Brahe participou de um copioso jantar na residência do Barão Rosenberg, Tycho comeu e bebeu durante toda a noite, na volta para casa não conseguia urinar e sofreu de uma grande crise de rins durante onze dias antes de falecer.

Kepler foi o responsável de cuidar de Tycho no leito de morte, na sua cama Tycho pediu a Kepler para provar a validade de seu sistema e desmascarar Copérnico, difícil seria isso, pois Kepler acreditava fervorosamente nas ideias copernicanas. Em sua última noite de vida, Tycho delirando de febre repetiu várias vezes a frase “Não deixe parecer que eu vivi em vão”, triste é saber que nem o próprio Brahe não tinha noção de suas contribuições para astronomia, com certeza sabemos que não viveu em vão. E assim no dia 24 de outubro de 1601 faleceu o grande astrônomo dinamarquês.

2.8 Matemático Imperial em Praga

Kepler foi nomeado Matemático Imperial por Rudolf II, apenas dois dias após o sepultamento de Tycho, assumindo assim o lugar do Dinamarquês, não só no trabalho como também os instrumentos. Kepler deu prosseguimento nas pesquisas da grande obra iniciada por Tycho, permaneceu no cargo até o falecimento de Rudolf II.

A família de Tycho herdou todos seus bens, inclusive as anotações de dados astronômicos, mas deu a Kepler o controle de todo legado científico de Tycho, o imperador acreditava que somente Kepler poderia dar continuidade e completa a obra de seu antecessor. A família tentou complicar e dificultar que Kepler tirasse

proveito daquelas informações, e tentou manter os dados em segredo, mais preocupado com a ciência que com a ética, com o apoio do imperador, Kepler conseguiu o material, e estava pronto para travar uma batalha contra Marte.

As observações de Tycho eram importantíssimas para constituição do trabalho de Kepler, somente com tais informações poderia confirmar o modelo esboçado no *Mysterium*.

Tycho observou o movimento aparente de Marte através das constelações, foram feitas por muitos anos, eram as mais precisas e com exatidão sem precedentes obtidas até então.

Os conceitos astronômicos da época de Kepler ainda eram os de Aristóteles, podemos imaginar as dificuldades para elaborar uma nova teoria capaz de convencer a todos. Claramente vê-se a dificuldade de Kepler em estabelecer um novo conceito astronômico, que quebrasse os dogmas aristotélicos que faziam parte da cultura europeia. Assim Kepler começou a trabalhar com dados do planeta Marte, e esta seria uma batalha para vários anos.

2.9 Estudando a Orbita de Marte

Ao receber as observações de Tycho, sua primeira atitude foi analisar a orbita de Marte. Inicialmente percebeu que não seria uma tarefa fácil, pois não conseguia demonstrar com as observações a orbita circular do planeta, conhecido como planeta vermelho, Marte seria o responsável por Kepler desvendar os segredos do céu.

Após um ano de cálculos para encontrar de forma correta a orbita marciana, Kepler encontrou uma margem de erro de oito minutos de grau, sendo um valor aceitável para Ptolomeu e Copérnico, pois possuíam uma margem de erro de dez minutos de grau, porém tal margem de erro intrigou o astrônomo, pois era um valor inaceitável para as observações de Tycho, que possuía margem de erro de apenas dois minutos e grau.

Era necessário descobrir o significado da discordância, só anos depois Kepler entenderia que esses oito minutos mudariam o rumo da astronomia e ajudaria na construção do magnífico edifício que tanto queria.

Com dedicação tentou todos os tipos de círculos para poder explicar de forma coerente o sistema solar. Ao perceber que nenhuma forma circular conseguiria

satisfazer as observações de Tycho, Kepler partiu para substituição do círculo por uma curva geométrica que pudesse se ajustar as observações.

Tendo o objetivo de traçar a configuração da órbita de Marte, decidiu determinar o movimento da Terra em torno do Sol, pois um pequeno erro em relação à trajetória da Terra poderia causar enormes erros em seus cálculos, afinal a Terra é o ponto do qual determinamos as posições dos outros astros celestes.

Para reexaminar a trajetória terrestre, imaginou um método inovador. Transportou o observador da Terra para Marte, e dessa forma, calcular o movimento terrestre, exatamente como faria uma pessoa que morasse naquele planeta.

Utilizando de tal procedimento, conseguiu determinar algumas coisas importantes, tais como, a distância entre Marte e o Sol e que a Terra assim como os outros planetas não se deslocavam com velocidade uniforme. Kepler também percebeu que o Sol de uma forma desconhecida era responsável pelo movimento dos planetas.

Dessa maneira conseguiu observar as posições ocupadas pela Terra, e viu que não formavam exatamente um círculo, além disso, o Sol não ocupava exatamente o centro. Observou que Marte variava sua velocidade de acordo com sua distância ao Sol, se movia mais rapidamente quando estava próximo ao Sol e mais lentamente quando estava afastado.

Descoberta que se transformou na segunda lei de Kepler, mesmo ainda não tivesse descoberto a primeira. Podemos dizer que sua primeira lei na verdade é a segunda, e pode ser enunciada da seguinte forma:

“A reta que une um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais”

Após estabelecer a órbita terrestre, era preciso fazer o mesmo com Marte. Ao estudar novamente a órbita de Marte, já tinha dúvidas quanto à sua circularidade, sabia que de alguma maneira havia de ser uma curva oval, Kepler já sabia que o Sol não ocupava o centro da órbita. Perdeu-se em cálculos e mais cálculos para tentar demonstrar a área oval, em 14 de julho de 1603, reconheceu sua incapacidade em carta a um amigo.

Kepler dizia que se a órbita fosse uma elipse perfeita, suas repostas seriam encontradas em Arquimedes, mas nem sequer questionou a elipse como sendo a órbita de Marte, pois isso abalaria sua fé em Deus como sendo criador de uma

geometria celeste perfeita. Algum tempo depois Kepler reconheceu que a forma ovalada não era solução, e partiu para uma nova tentativa.

Finalmente após seis anos conseguiu descrever a órbita de Marte. Entretanto, ainda não sabia tratar-se de uma elipse, Kepler dominava a teoria das seções cônicas e percebeu que na realidade, a equação encontrada nos cálculos definia com precisão a órbita de Marte como sendo elíptica, estava descoberta a primeira lei e assim o segredo dos céus Havia sido descoberto.

A nova lei descoberta recebe o nome de lei das órbitas e mesmo sendo a segunda lei descoberta recebe o nome de primeira, pois seu funcionamento é primordial para as demais leis descobertas por Kepler, tal lei é definida como:

“Um planeta se movi em órbita elíptica com o Sol ocupando um de seus focos”

Todos os resultados encontrados nos estudos sobre Marte, juntamente com suas duas primeiras leis foram publicadas em sua obra *“Astronomia Nova”* no ano de 1609.

Primorosamente a elipse se encaixou de forma perfeita com as observações de Tycho. Nesse novo modelo o Sol não ocupava o centro, mas sim um dos dois focos da elipse, isso daria origem ao que conhecemos hoje como a primeira lei de Kepler ou lei das órbitas.

2.10 Matemático Provincial em Linz

A chegada de Kepler na cidade foi um evento importante. Encontrou uma situação muito parecida com o que viveu em Graz.

Como matemático provincial, tinha como dever ensinar na escola local. Para a época o título de professor não recebia muito prestígio, mas Mattias o sucessor de Rudolf II confirmou o título de matemático imperial a Kepler, e às vezes lhe prestava consultas astrológicas.

Estando em Linz próximo, Kepler estava visitando Praga sempre que o Imperador desejasse, assim continuava recebendo os salários dos austríacos.

Envolveu-se num conflito com a igreja, pois reafirmou sua posição contrária à doutrina da presença do espírito e do corpo de Cristo, como reação a igreja elaborou um decreto que o excluiu da comunhão.

Giovanni Antonio Rolfini, Professor em Bolonha, convidou Kepler para suceder ao falecido Antonio Magini na Cátedra matemática, porém Kepler recusou o

convite, provavelmente pensava na falta de liberdade de expressão existente na Itália.

2.11 Segundo Casamento

Passando-se um ano desde sua chegada em Linz, Kepler decide encontrar uma nova esposa. Gastou seu tempo refletindo sobre onze candidatas, e em 1613, decidiu-se por Susana Reuttinger, uma jovem de vinte e dois anos.

Casaram-se em 30 de outubro de 1613, Kepler um matemático da Corte convidou o imperador Mattias à seu casório, o imperador o presenteou com uma taça no valor de 50 táleres.

O segundo casamento de Kepler lhe traria mais felicidade do que seu primeiro. Sua esposa teve sete filhos, onde apenas três filhos sobreviveram por um tempo considerável.

Mesmo com a dor de perder quatro filhos, Kepler não se entregou e com muita coragem retornou aos estudos de astronomia.

2.12 O Retorno para Astronomia

Ao retornar seus estudos no ramo da astronomia, Kepler tentou levar o observador o centro do universo para examinar as variações de velocidades angulares, sem considerar as distancias dos planetas.

Sem muita explicação sobre as circunstancias de uma nova descoberta, consciente da importância do ocorrido, e escreveu o anuncio da nova: *“Uma vez encontradas as verdadeiras dimensões das orbitas, graças às observações de Brahe, por um trabalho sem descanso e de longa duração, finalmente foi encontrada a verdadeira proporção dos tempos periódicos naquelas orbitas”*.

Após um longo período de dedicação, repleto de dificuldade, Kepler chegou a leis dos períodos também conhecida como terceira lei de Kepler, essa lei foi publicada em sua obra *“Harmonia do Mundo”* que não se prendia a astronomia, mas dividia-se nos ramos da geometria, música, astrologia e astronomia.

$$\frac{T^2}{R^3} = k$$

A terceira lei relaciona o período do movimento de qualquer planeta com sua distância média em relação ao Sol e se define de acordo com o enunciado:

“Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais ao cubo dos raios médios de suas orbitais”.

Capítulo 3

Definições Importantes

Para se entender as leis do movimento planetário precisamos de alguns conceitos físicos e geométricos básicos.

3.1 A elipse

A elipse pertence à família das cônicas, a razão que para obtermos uma elipse é só cortar um cone com determinado ângulo em relação a base. Essa figura geométrica já era conhecida dos gregos, mas foram esquecidas de forma bruta até Descartes, já foram lapidadas e surgiu uma equação para representar a elipse.

Para construir uma elipse são necessários dois centros, ou melhor, dois focos, que estão equidistantes do centro C . Assim a elipse tem dois raios r_1 e r_2 , logo já temos a primeira propriedade, os raios não alteram seu tamanho, a soma $r_1 + r_2$ é sempre constante.

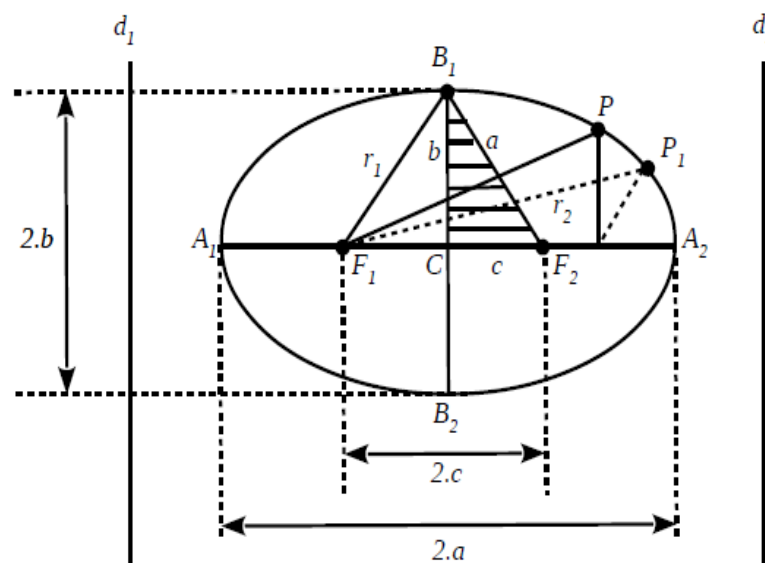


Figura 3.1- Elipse

Pela figura (3.1) observamos que:

$$\overline{F_2A_1} = \overline{F_1A_2}$$

Quando o ponto P estiver no ponto A₁, teremos r₁ e r₂ totalmente na horizontal. Assim o comprimento total será dado por:

$$\overline{F_2A_1} + \overline{F_1A_1} = r_1 + r_2$$

Entretanto, sabemos que:

$$\overline{F_2A_1} = \overline{F_2C} + \overline{CF_1} + \overline{F_1A_1}$$

Logo temos:

$$\overline{F_2C} + \overline{CF_1} + \overline{F_1F_1} + \overline{F_1A_1} = r_1 + r_2$$

Sendo o comprimento também representado como:

$$\overline{F_2C} + \overline{F_2A_2} + \overline{CF_1} + \overline{F_1A_1} = r_1 + r_2$$

Concluimos então que:

$$r_1 + r_2 = 2.a$$

Sabendo que a excentricidade da elipse é dada por:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

Há varias formas de entender a excentricidade de uma cônica, um exemplo é a circunferência, os dois focos coincidem, logo c vale zero. Para interpretar a elipse sabemos que ela possui $c < a$, portanto $0 < \varepsilon < 1$.

Para entender de forma clara a elipse é necessário determinar alguns conceitos importantes referentes aos seus componentes.

Os seguimentos A₁C e A₂C são chamados de semi-eixos maiores, assim os seguimentos B₁C e B₂C recebem o nome de semi – eixos menores, A₁A₂ e B₁B₂ são chamados de eixo maior e menor, respectivamente. Essas duas grandezas são fundamentais e determinam uma elipse.

“A elipse é um lugar geométrico dos pontos de um plano, cuja soma das distancias desses pontos aos focos, é constante.”

Os pontos A₁, A₂, B₁ e B₂ são os vértices. F₁ e F₂ são os focos da elipse, C é o centro e F₁P + F₂P = 2a.

3.1.1 O Parâmetro da Elipse

Quando o ponto P estiver no ponto B_1 surgirá o triângulo retângulo CB_1F_2 , e teremos $r_1=r_2=a$. No triângulo surge a relação do teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (3.1)$$

O segmento F_2P da elipse recebe o nome de parâmetro. E do triângulo retângulo F_1F_2P temos:

$$\overline{F_1P}^2 = \overline{F_1F_2}^2 + \overline{F_2P}^2 \quad (3.2)$$

Em relações que já foram determinadas anteriormente a equação (3.2) assumi a forma de:

$$\overline{F_1P}^2 = 4c^2 + p^2 \quad (3.3)$$

Sabemos da relação:

$$\overline{F_1P} + p = 2a$$

Logo:

$$\overline{F_1P} = 2a - p \quad (3.4)$$

Substituindo a equação (3.4) na equação (3.3), temos:

$$(2a - p)^2 = 4c^2 + p^2$$

Assim,

$$4a^2 + 4ap + p^2 = 4c^2 + p^2$$

Manipulando a equação encontra-se:

$$a^2 - c^2 = ap \quad (3.5)$$

Mas da (3.1), sabe-se que:

$$a^2 - c^2 = b^2$$

Substituindo na equação (3.5), encontramos o parâmetro da elipse:

$$p = \frac{b^2}{a} \quad (3.6)$$

Esse é o parâmetro ou também chamado de semicorda focal mínima.

Através do movimento orbital de uma cônica, o parâmetro da elipse ou também chamado de semicorda focal pode receber uma representação se utilizando já das órbitas planetárias, algo que vamos ver mais na frente. E é definido como sendo:

$$p = \frac{L^2}{GMm^2}$$

Onde:

L = É o momento angular

G = A constante gravitacional

M = A massa do Sol

m = A massa do planeta

Todos os conceitos que serão vistos mais na frente, claro que tal definição só será útil quando estivermos trabalhando já com as orbitas planetárias das leis de Kepler.

3.1.2 Demonstração da Equação Geral da Elipse

Através da geometria de Descartes foi possível equacionar a reta e a circunferência, isso também nos permite equacionar a elipse, e assim fazer sua dedução equacional.

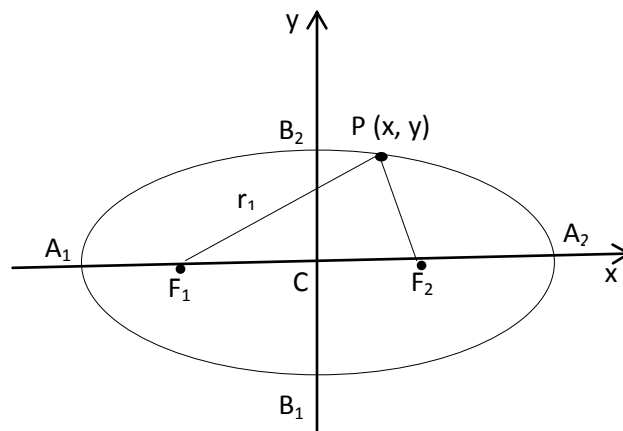


Figura 3.2 – Equação geral da elipse

Pelo plano cartesiano temos: $P(x, y)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$

Pela distancia de dois pontos podemos tirar a relação:

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a$$

Sejam $|F_1P| = (x + c, y)$ e $|F_2P| = (c - x, -y)$, logo:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

Manipulando a equação encontramos:

$$\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} = 2a - \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado os dois lados da igualdade, encontramos:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} + c^2 - 2xc + x^2 + y^2$$

Logo temos,

$$4a\sqrt{c^2 - 2xc + x^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

Dividindo toda equação por 4, encontramos:

$$a\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando ao quadrado e manipulando a equação, chegamos a relação:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Da equação (3.1) sabemos que $b^2 = a^2 - c^2$, assim ficamos com equação assumindo a forma de:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo a igualdade por a^2b^2 , temos a equação canônica da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Assim percebemos analogamente, que se o centro da elipse estiver em um ponto C(h, k) e o eixo maior for paralelo ao eixo 0x, a equação assumi a forma de:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

No caso em que o centro da elipse estiver no ponto C(h, k) e o eixo maior paralelo ao eixo 0y, analogamente a equação da elipse é dada por:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

3.1.3 Dedução da Equação Reduzida da Elipse

Tal equação foi obtida por Apolônio. A abscissa do ponto P é tomada em função do eixo maior da elipse, assim as coordenadas ficam da seguinte forma:

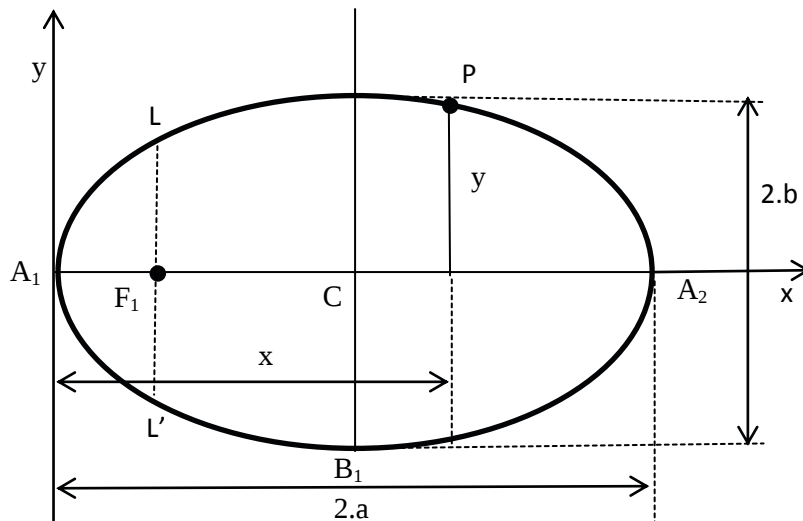


Figura 3.3 – Equação reduzida da elipse

$$P((x - a), y)$$

Logo a equação da elipse para o caso, toma forma de:

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ao desenvolvermos a equação encontramos:

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2 - 2ax + a^2}{a^2} \right)$$

E logo chegamos à:

$$y^2 = \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2} \quad (3.7)$$

Da equação (3.6) encontramos o parâmetro da elipse, substituindo na equação (3.7), temos:

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$$

Logo:

$$y^2 = x \left(2p - \frac{p}{a}x \right) \quad (3.8)$$

3.1.4 Dedução da Equação Polar da Elipse

Tomando as definições da elipse já adquiridas, sabemos que os eixos $A_1A_2=2a$, $B_1B_2=2b$ e $F_1F_2=2c$, e tendo o ponto genérico como sendo $P(p, \theta)$.

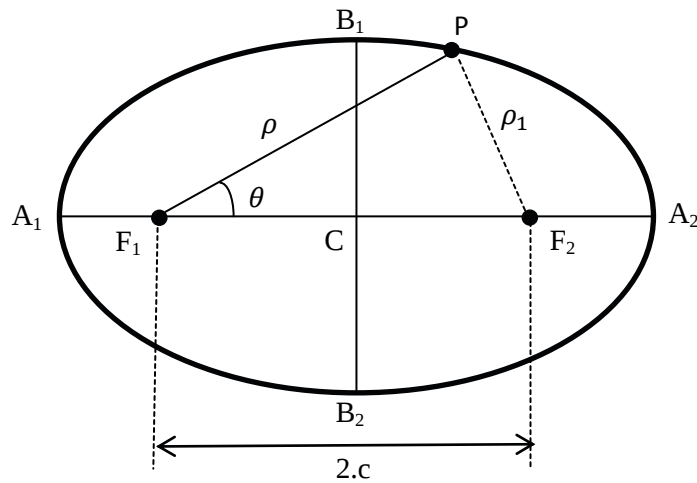


Figura 3.4 – Equação polar da elipse

Assim sabemos que:

$$\rho + \rho_1 = 2a$$

Logo sabemos que:

$$\rho_1 = 2a - \rho \quad (3.9)$$

Tendo o triângulo F_2F_1P formado na figura acima, aplicando-o a lei dos cossenos:

$$\rho_1^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos \theta \quad (3.10)$$

Substituindo a equação (3.9) na (3.10):

$$(2a - \rho)^2 = \rho^2 - 4c^2 - 4c\rho \cos \theta \quad (3.11)$$

Desenvolvendo a equação chegamos à:

$$4a^2 - 4a\rho = 4c^2 - 4c\rho \cos \theta$$

Ao dividir a equação por 4 e manipulando-a chegasse em:

$$a^2 - c^2 = \rho(a - c \cos \theta) \quad (3.12)$$

Sabemos da equação (3.1) que $b^2 = a^2 - c^2$, logo:

$$b^2 = \rho(a - c \cos \theta) \quad (3.13)$$

Concluimos então que:

$$\rho = \frac{b^2}{(a - c \cos \theta)}$$

Dividindo ambos os termos por “a”, teremos:

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad (3.14)$$

Onde “p” é o parâmetro da elipse e “e” é a excentricidade.

3.2 Operação com Vetores

Vetor é um segmento de reta, orientado por uma flecha, que possui um tamanho e uma orientação especial, representamos um vetor por uma letra com uma flecha em cima, como $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

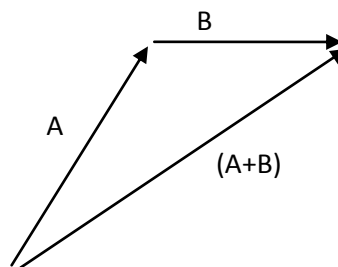
Os vetores possuem direção, magnitude (módulo) e sentido, sendo necessário que todos sejam considerados quando eles são combinados. Alguns exemplos de grandezas vetoriais são a velocidade, aceleração, força e momento.

Para se encontrar a magnitude de vetor é necessário tira seu módulo, por exemplo, temos o vetor $\vec{R}$ e sua magnitude é representada como $|\vec{R}|$.

Nos diagramas os vetores sempre serão representados por setas, sendo o comprimento da seta proporcional a sua intensidade (módulo), e a ponta da seta indica o sentido e a direção.

Soma com dois Vetores

Temos dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, soma dos vetores nos dará um novo vetor $\overrightarrow{(\vec{A} + \vec{B})}$. O vetor é extremidade inicial de $\vec{A}$ à ponta de $\vec{B}$.



Multiplicação por um Escalar

Se multiplicarmos um vetor por valor escalar positivo, sua direção e sentido inalterado, pois o escalar ira multiplicar a magnitude, porem se o escalar for negativo o sentido é invertido. Sendo a multiplicação por um escalar distributiva.

$$a(\vec{A} + \vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$$

Produto Escalar de dois Vetores

É definido tal que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta$$

Onde θ é o ângulo formado entre os dois vetores. O produto escalar entre dois vetores tem propriedade comutativa:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Assim como é distributiva:

$$\vec{A}(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

Produto Vetorial de dois Vetores

Definido tal que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \theta$$

O produto vetorial gera um novo vetor, tal que o vetor formado deve ser ortogonal aos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ simultaneamente.

O produto vetorial é distributivo:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$$

Entretanto, não é comutativo:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Produto Misto

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

Primeiramente se calcula o produto vetorial e depois o escalar. Sendo que os vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ definem no espaço um paralelepípedo e seu produto misto nos dar o volume desse sólido. Tendo a seguinte propriedade:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Produto Vetorial Triplo

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

Tendo as seguintes propriedades:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

3.4 Força Gravitacional

Foi descrita por Isaac Newton, veio através da análise de modelos para o movimento dos planetas.

Percebeu que todos os planetas moviam-se de forma semelhante em torno do mesmo corpo, então era necessário a mesma explicação para descrever o movimento. Dessa forma surgiu a força gravitacional:

$$F = -\frac{K}{r^2} \cdot \hat{r}$$

Equação foi instituída de forma empírica, e tem sua base na força de caráter atrativo, já que os planetas se moviam em orbitais fechadas, deveria haver uma centrípeta e por isso tem o sinal negativo, além de ter o caráter central partindo da mesma origem.

Sabendo que K denominado como massa gravitacional, dependia dos corpos envolvidos, dessa forma restaria somente o fator de proporcionalidade, Ele acabou sendo chamado de *constante gravitacional* tendo como representação G, assim a equação da forma gravitacional chega na forma conhecida hoje em dia.

$$F = -G \frac{Mm}{r^2} \cdot \hat{r}$$

3.4 Momento de uma Força

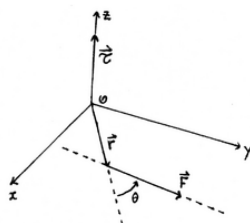


Figura 3.5 – Momento de uma força em um plano

Se uma força F é aplicada num corpo situado num ponto P cuja posição em relação a uma origem é dado por um vetor r, o momento de uma força é uma grandeza vetorial, que atua sobre esse corpo em relação a origem O, e é definido como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

A grandeza física chamada momento de uma força, em forma de modulo é dada por:

$$\tau = F \cdot r \cdot \sin \theta$$

3.5 Momento Angular

O momento angular de um corpo é definido como sendo o produto vetorial do raio r , por sua quantidade de movimento p . quando uma força qualquer aplica uma num corpo, em relação a uma origem é chamado de torque (momento de uma força), quando um objeto não sofre ação de um torque o momento angular é conservado.

Consideremos um corpo possuidor de massa m e dotado de velocidade v , com determinada quantidade de movimento p , localizado num ponto P com posição relativa à origem dada pelo vetor r , então o momento angular L , é definido como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Como $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, temos que:

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

O momento angular é uma grandeza vetorial, tendo seu modulo a seguinte forma:

$$L = r \cdot p \cdot \sin \theta$$

3.6 Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

“A quantidade de movimento total de um sistema composto de dois, ou mais, corpos sujeitos somente às interações mutuas permanece constante.”

O trecho acima é oriundo da lei de Newton, se não houver nenhuma força interagindo num sistema fechado a quantidade de movimento é constante.

Coisa que nem sempre acontece quando se fala no momento angular, pois em certos casos mesmo quando existe uma força aplicada a um corpo, algo pode ser zero, o caso da distorção por exemplo.

Podemos representar matematicamente, simplesmente dizendo que $\vec{r} \times \vec{F} = 0$. Coisa que acontece quando os dois vetores são paralelos, vamos demonstrar partindo deste mesmo principio.

$$\vec{r} \times \vec{F} = 0$$

Sabemos que da lei de Newton temos que $\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$, logo temos que:

$$m \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = 0$$

Derivando $(\vec{r} \times \vec{v})$, chegamos que:

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3.15)$$

Multiplicando a equação por m, ficamos com:

$$m \frac{d(\vec{r} \times \vec{v})}{dt} = m \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

Como:

$$m \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = 0$$

Claramente observa-se,

$$m \frac{d(\vec{r} \times \vec{v})}{dt} = 0$$

Também podendo assumir essa forma:

$$\frac{d(m \cdot \vec{r} \times \vec{v})}{dt} = 0 \quad (3.16)$$

Integrando a equação (3.16), obtemos:

$$\int \frac{d(m \cdot \vec{r} \times \vec{v})}{dt} = k$$

$$m(\vec{r} \times \vec{v}) = k$$

Como:

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

Logo concluímos que:

$$L = \text{Constante}$$

Assim prova-se que a não existência do torque, ou $\vec{\tau} \times \vec{F} = 0$, também L, ou o momento angular é conservado.

3.7 Equação Diferencial Vetorial do Movimento Relativo de Dois Corpos

Da lei de gravitação universal, sabemos que a força que relaciona dois corpos de massas M e m , que estão separados por uma distancia $\vec{r}$ é dada por:

$$F = G \frac{M.m}{r^2}$$

Sabendo que M e m são as massas dos planetas, e r_M e r_m são seus raios, de forma que $r = r_m - r_M$. Se multiplicarmos a equação pelo vetor unitário $\frac{\vec{r}}{r}$, teremos a direção e o sentido da força.

$$\vec{F} = -G \frac{M.m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.17)$$

Da segunda lei de Newton se sabe que:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Substituindo $\vec{F}$ em (3.17), obtemos:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= -G \frac{M.m}{r^3} \cdot \vec{r} \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= -G \frac{M}{r^3} \cdot \vec{r} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Pela terceira lei de Newton, temos de certo:

$$\begin{aligned} M \cdot \frac{d^2 \vec{r}_M}{dt^2} &= G \frac{M.m}{r^3} \cdot \vec{r} \\ \frac{d^2 \vec{r}_M}{dt^2} &= G \frac{m}{r^3} \cdot \vec{r} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Subtraindo a equação (3.19) da (3.18), chegamos á:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{(M + m)}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Fazendo $\mu = G(M + m)$, chegamos à equação diferencial vetorial do movimento relativo de dois corpos:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (3.20)$$

Esta é a equação diferencial que nos ajuda a obter a orbita relativa de corpos, tais como planetas, cometas e satélites.

3.8 Principio da Conservação do Momento Angular

Se multiplicarmos vetorialmente a equação diferencial encontrada no tópico anterior por $\vec{r}$, temos:

$$\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \cdot \vec{r} \times \vec{r}$$

$$\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$$

Mas sabemos que,

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Logo:

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = 0$$

Para que essa derivada seja igual à zero, o termo entre parênteses, chamado de momento angular ($\vec{L}$), deve ser constante, assim:

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \vec{L} = \text{constante}$$

A expressão acima representa a lei da conservação do momento angular.

Capítulo 4

As Leis de Kepler

A história da astronomia sem dúvidas, nunca mais foi a mesma depois de Kepler. Muitos modelos foram criados na Grécia antiga, o modelo de Ptolomeu que se tornou um credo alicerçado na religião, o modelo de Copérnico, e de tantos outros. Entretanto é muito difícil de comparar tais modelos com a grandeza alcançada por Kepler em suas leis, ele trilhou um caminho árduo e seu trabalho é a base de todo conhecimento astronômico desenvolvido até hoje.

Com as observações herdadas de Tycho, Kepler travou uma batalha duradoura a fim de criar um modelo que correspondesse as observações adquiridas, usando a elipse para a órbita de Marte observou o encaixe perfeito, preocupou-se também com a velocidade dos planetas, pois percebia que se moviam mais rápido próximo ao Sol e mais lento quando afastado, e assim surgiu a sua segunda lei, ao continuar os estudos sobre os planetas conseguiu estabelecer uma relação entre o período de revolução dos planetas e os raios de suas órbitas, assim chegou a sua terceira lei.

O mais incrível é que apesar das suas leis se encaixarem perfeitamente com as observações adquiridas, elas não foram imediatamente demonstradas, isso ocorreu anos após sua morte com a obra maravilhosa de Isaac Newton. O criador da lei de interação entre corpos de grande massa, e é denominada de lei da gravitação universal, acreditava ser uma força de ação a distância.

Neste capítulo além de falarmos das leis de Kepler, também serão demonstradas matematicamente e para isso precisaremos das definições vistas no capítulo anterior.

4.1 A Primeira Lei

Sua primeira lei é bem simples e é definida da seguinte forma:

“Um planeta se movi em orbita elíptica com o Sol ocupando um de seus focos.”

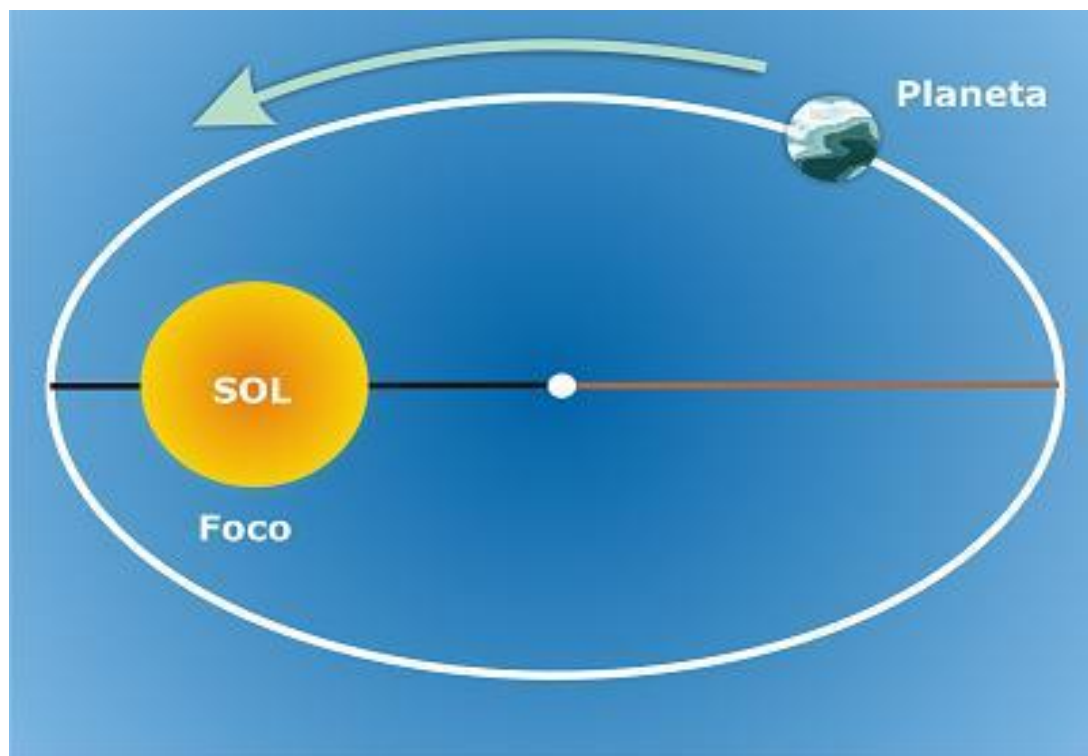


Figura 4.1 – Lei das Orbitas

Embora para nossa época seja algo simples de entender, para a época de nosso gênio era algo muito complicado, dessa forma Kepler passou seis anos em envolvido em muitos cálculos e chegou a dizer:

“a verdade da natureza, que eu desprezara, voltou às escondidas pela porta traseira, disfarçando-se para ser aceita. Desprezei a primeira equação e voltei às elipses acreditando ser essa uma hipótese inteiramente diversa, ao passo que duas, são as mesmas. Pensei e calculei até a beira da loucura o motivo que o planeta preferia uma orbita elíptica, ah que tolo que eu fui.” [1]

Kepler deu uma orbita em forma de elipse aos planetas, afastou o Sol do centro, até então era algo inovador. Nessa nova orbita os planetas durante suas viagens, às vezes estavam próximos ao Sol, outras vezes estavam afastados.

É necessário sabermos que Kepler chegou a essa lei de forma empírica, mediante estudos precisos das observações feitas por Brahe.

4.2 Demonstração da Primeira Lei

Nessa demonstração usaremos a lei da gravitação universal e a segunda lei de Newton.

Multiplicando vetorialmente a equação (3.20) pelo momento angular, $\vec{L} = \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$, visto anteriormente. Levando em conta que $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, temos que:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \vec{L} = \frac{\mu}{r^3} \cdot (\vec{L} \times \vec{r}) \quad (4.1)$$

O lado direito da equação (4.1) pode assumir essa forma:

$$\frac{\mu}{r^3} \cdot (\vec{L} \times \vec{r}) = \frac{\mu}{r^3} \cdot \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \times \vec{r}$$

Como $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, então:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r^3} \cdot \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \times \vec{r} &= \frac{\mu}{r^3} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot r^2 - \frac{\mu}{r^3} \cdot \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot \vec{r} \\ \frac{\mu}{r^3} \cdot \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \times \vec{r} &= \frac{\mu}{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{\mu}{r^3} \cdot \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

Sabendo que:

$$\mu \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\mu}{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{\mu}{r^3} \cdot \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot \vec{r}$$

Então:

$$\frac{\mu}{r^3} \cdot (\vec{L} \times \vec{r}) = \mu \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

O lado esquerdo da equação (4.1) pode ter essa forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \vec{L} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{L} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{L} \right) &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \vec{L} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{L}}{dt} \end{aligned}$$

Como $\vec{L}$ é constante, sabemos então que $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$. Assim a equação (4.1) fica sendo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{L} \right) = \mu \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

Integrando os termos chegamos à:

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \times \vec{L} \right) = \int \mu \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\frac{dr}{dt} \times \vec{L} = \frac{\mu}{r} \cdot \vec{r} + \vec{\beta}$$

Onde $\vec{\beta}$ é um vetor constante.

Multiplicando escalarmente por $\vec{r}$, obtemos:

$$\vec{r} \cdot \frac{dr}{dt} \times \vec{L} = \frac{\mu}{r} \cdot \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{\beta} \cdot \vec{r}$$

Como $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$, chegamos em:

$$\left(\vec{r} \times \frac{dr}{dt} \right) \cdot \vec{L} = \frac{\mu}{r} \cdot r^2 + \beta \cdot r \cdot \cos \theta$$

Onde θ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{\beta}$, assim temos que:

$$L^2 = \mu \cdot r + \beta \cdot r \cdot \cos \theta$$

Manipulando a equação:

$$L^2 = r \cdot \mu \left(1 + \frac{\beta}{\mu} \cdot \cos \theta \right)$$

Isolando o r na equação, temos que:

$$r = \frac{\frac{L^2}{\mu}}{1 + \frac{\beta}{\mu} \cdot \cos \theta}$$

A equação encontrada é similar a equação polar da elipse, tomando como:

$$p = \frac{L^2}{\mu}$$

$$\varepsilon = \frac{\beta}{\mu}$$

Assim chegamos à equação que vimos no capítulo anterior:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

Representando a trajetória do planeta em torno do Sol como sendo elíptica, usando coordenadas polares. Infelizmente Kepler não conseguiu provar porque as orbitais eram elípticas, pois lhe faltaram ferramentas matemáticas.

4.3 A Segunda Lei

“A reta que une um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais.”

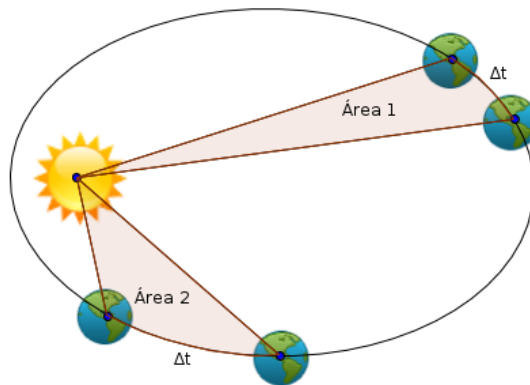


Figura 4.2 – Lei das áreas

Quando um planeta está se movendo, num dado intervalo de tempo, ele varre uma área imaginária. Quando está longe do Sol essa área é longa e estreita, mas quando está próxima ao Sol ela é curta e larga. Em seus estudos Kepler conseguiu determinar que essas áreas são sempre iguais.

A descoberta proporcionou a descrição de como um planeta muda de velocidade conforme sua distância ao Sol, dessa forma os astrônomos sabiam onde encontrar os planetas através de uma lei simples que não sofria variação. E assim concluiu que a área varrida pelo planeta, tem relação direta com o tempo gasto para descrevê-la.

4.4 Demonstração da Segunda Lei

Imagine um vetor r que acompanha o planeta durante sua viagem, como a órbita é uma elipse seu tamanho vai variar no decorrer do tempo, durante o percurso o raio r irá varrer uma área, num intervalo de tempo. Olhe a figura abaixo e imagine o planeta indo de A para B.

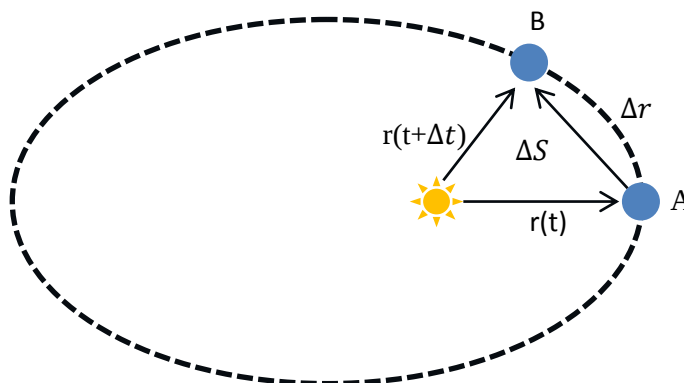


Figura 4.3 – área varrida pelo planeta

Tomando Δr como um vetor muito pequeno, assim praticamente coincidindo com o arco da elipse.

Quando o planeta se deslocar o vetor r ira varrer a área ΔS na forma triangular como mostra na figura.

O paralelogramo abaixo representa o produto vetorial entre o vetor r e o Δr .

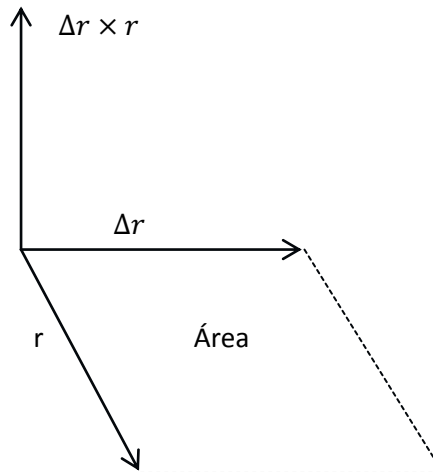


Figura 4.4 – área do produto vetorial

Entretanto a área ΔS do triangulo, é exatamente igual a metade da área do paralelogramo, como mostra a figura a seguir.

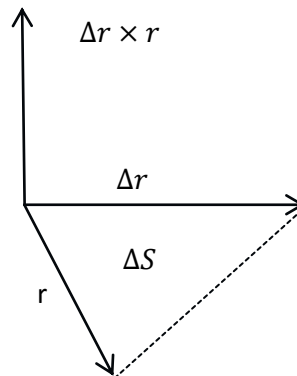


Figura 4.5 - Metade da área do paralelogramo

$$\Delta S = \frac{1}{2} (r \times \Delta r)$$

Dividindo por Δt , obtemos:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(r \times \frac{\Delta r}{\Delta t} \right)$$

Quando Δt é muito pequeno tendendo a zero, temos uma derivada em relação ao tempo.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \left(r \times \frac{dr}{dt} \right)$$

Logo temos:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} (r \times v)$$

Chegando a velocidade de variação do vetor r , um valor constante, e tem o mesmo valor em qualquer parte da orbita do planeta. Isso acontece porque tal movimento obedece a lei da conservação do momento angular.

A única força existente no movimento do planeta é a gravidade, e esta tem a mesma direção do raio vetor r , logo já se sabe que sua ação em termos de torque é zero, dessa maneira a quantidade de movimento é conservada.

Já vimos no capítulo anterior que:

$$L = m(r \times v)$$

Sabendo que r e v são perpendiculares, na orbita elíptica o raio r reduz quando se aproxima do Sol e aumenta quando se afasta, e para que L permaneça constante a velocidade tem que agir de maneira inversamente proporcional a r .

Esses conceitos podem ser explicados de forma simples, vamos partir da situação:

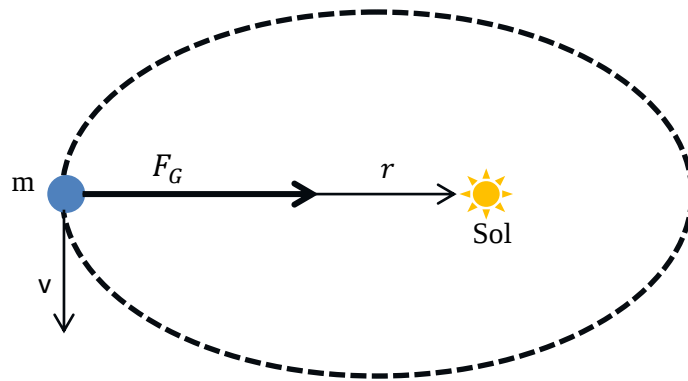


Figura 4.6 – Demonstração do torque nulo

Um planeta de massa m movendo-se em orbita elíptica em torno do Sol. Existe a força gravitacional que atua sempre ao longo de r , em direção a Sol. Obviamente o momento da força que atua no planeta é nulo, como vimos:

$$\tau = r \times F = 0$$

Sabendo que $\tau = \frac{dL}{dt}$, logo o momento angular de um planeta é constante.

Podemos chegar a esse resultado usando geometria. Vimos anteriormente que a área ΔS do triângulo formado pelo vetor r é exatamente igual a metade da área formada pelo produto vetorial de r e Δr

Sendo o deslocamento do planeta no intervalo dt e sendo $\Delta r = v dt$, obtemos que:

$$dS = \frac{1}{2}(r \times dr)$$
$$dS = \frac{1}{2}(r \times v \cdot dt)$$

Logo temos:

$$dS = \frac{L}{2m} \cdot dt$$

Então sabemos que:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{constante}$$

A expressão acima representa de forma geométrica o momento angular, e nada mais é do que a taxa de variação da área em função do tempo, sendo L e m constantes do movimento. Assim, o raio r descreve áreas iguais em intervalos de tempos iguais.

4.5 A Terceira Lei

Seguindo os estudos das tabelas de Tycho, Kepler tentou estabelecer uma relação entre os períodos de revolução dos planetas e os raios de suas orbitais. Passou anos em busca dessa relação e finalmente chegou ao resultado que hoje é conhecido como a terceira lei de Kepler, e pode ser definida como:

“Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais ao cubo dos raios médios de suas orbitais.”

Essa lei também é conhecida como lei harmônica, pois quando Kepler encontrou essa relação ele pensou que havia encontrado a verdadeira harmonia celeste.

Sua nova lei foi descoberta em 1618, e publicada no ano seguinte em sua obra *“harmonia do mundo”*, seria a coroação da obra maravilhosa feita por esse homem.

Nunca ninguém havia feito tantas descobertas, foram necessários mais de vinte anos de dedicação e assim essa ultima lei revelou uma conexão entre diferentes planetas, os segredos do universo foram revelados a Kepler e de forma maravilhosa foram expostas através de suas leis.

4.6 Demonstração da terceira Lei

Vamos fazer essa dedução a partir da conservação do momento angular.

No tópico (4.4), vimos que:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Integrando a equação:

$$\int dS = \int \frac{L}{2m} dt$$

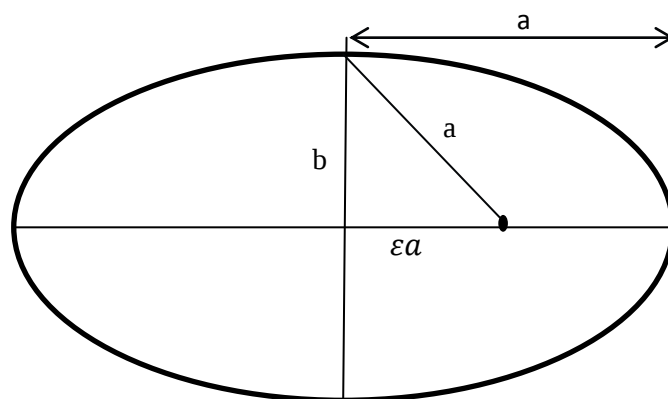
Logo:

$$S = \frac{L}{2m} t$$

Isolando t, chegamos à:

$$t = \frac{2S}{L/m}$$

Sabemos que da elipse:



Como $\varepsilon = \frac{c}{a}$, logo $c = \varepsilon a$, então pela figura temos:

$$a^2 = b^2 + \varepsilon^2 a^2$$

$$b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$$

$$\frac{b^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2)$$

Partindo para a equação da elipse, obtemos:

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos \theta} \quad (4.2)$$

Que pode ser representado também como:

$$r = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1+\varepsilon \cos \theta} \quad (4.3)$$

Igualando (4.2) e (4.3), chegamos:

$$\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos \theta} = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1+\varepsilon \cos \theta}$$

$$\frac{L^2}{GMm^2} = a(1-\varepsilon^2)$$

Assim, temos que:

$$\frac{L^2}{m^2} = GM \cdot a(1-\varepsilon^2)$$

Logo,

$$\frac{L}{m} = \sqrt{GM \cdot a(1-\varepsilon^2)}$$

Como $t = \frac{2S}{L/m}$, chegamos à:

$$t = \frac{2S}{\sqrt{GMa(1-\varepsilon^2)}} \quad (4.4)$$

Sendo a área da elipse calculada dessa maneira:

$$S = \pi \cdot a \cdot b$$

Como $b = a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}$, logo:

$$S = \pi a^2 \sqrt{(1-\varepsilon^2)} \quad (4.5)$$

Substituindo (III) em (IV), temos:

$$t = \frac{2\pi a^2 \sqrt{(1-\varepsilon^2)}}{\sqrt{GMa(1-\varepsilon^2)}}$$

$$t = \frac{2\pi a^2}{\sqrt{GMa}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}$$

Logo:

$$t = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a}}$$

Assim chegamos em:

$$t = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \cdot a^{3/2}$$

Elevando ao quadrado a equação chegamos em:

$$t^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot a^3$$

Chegando assim à relação encontrada por Kepler:

$$\frac{t^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Essa é a equação que relaciona o período de revolução do planeta com seu raio de translação. Podemos constatar que se trata de uma relação constante para qualquer planeta, pois o termo $\frac{4\pi^2}{GM}$ depende da constante gravitacional e da massa do Sol.

Assim:

$$\frac{t^2}{a^3} = \text{constante}$$

Na realidade a equação nos diz é que quanto mais distante esta a orbita do planeta em relação ao Sol, mais tempo ele ira gastar para percorrê-lo.

Assim para dois planetas quaisquer, com períodos diferentes t_1 e t_2 e distancias r_1 e r_2 também diferentes, será valida a relação:

$$\frac{t_1^2}{r_1^3} = \frac{t_2^2}{r_2^3}$$

Esta lei explica corretamente o mecanismo do sistema solar, e são obedecidas em todo o universo.

Considerações Finais

A descoberta das três leis, sendo leis simples que prevalece nos céus, fez com que Kepler torna-se um marco na historia e assim a astronomia passou a ser dividida e duas épocas, antes e depois de Kepler.

Suas descobertas nos permitem saber que há uma relação intima entre o modo que se pensa e a forma que o mundo age. Dar-nos uma maior e melhor exploração confiável do universo.

A sua obra permanece como sendo a base fundamental para conquista do universo, pois são válidas para conquista do universo, pois são validas em todos os sistemas binários.

Grande conquista foi desvendar a maravilhosa obra desenvolvida por Kepler, trazendo uma grande satisfação.

Referências Bibliográficas

- [1] MOURÃO, Ronaldo de Freitas. *Kepler a construção das leis do movimento planetário*. 1ª Edição. São Paulo, Odysseus editora, 2003.
- [2] BASSALO, José Maria. *Crônicas de física*. Tomo 4, 1ª edição, Belém, editora da UFPA, 1996
- [3] GLEISER, Marcelo. *A dança do Universo*. 1ª edição. São Paulo, Companhia das letras, 1997.
- [4] *Paralaxe*, pag. 1230 - Grande Enciclopédia Universal - edição de 1980 - ed. Amazonas.
- [5] <http://astro.if.ufrgs.br/telesc/astrometria.htm>(acessado em 25 de novembro de 2012).
- [6] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. *Kepler o legislador dos céus*. 1ª Edição. São Paulo, Editora livraria da Física, 2012.
- [7] MOURÃO, Ronaldo Rogério de Freitas. *Dicionário Enciclopédico de Astronomia e Astrofísica*. 2ª edição revista e ampliada. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1996.
- [8] GLEISER, Marcelo. *A Harmonia do Mundo*. 1ª edição. São Paulo, Companhia das Letras, 2006.
- [9] KEPLER, Johannes. *The harmonies of the world*. Encyclopaedia Britannica, the University of Chicago, 1971.
- [10] K. M. Pedersen, “Water-Filled Telescopes and the Pre-History of Fresnel’s Ether Dragging”, pp. 499-564.
- [11] J.B. Marion and S.T. Thornton, Classical Dynamics of Particles and Systems - 5a. editor Saunders College Publishing / 2004.

- [12] K.R. Symon, Mecânica, Editora Campus / 1982.
- [13] K.D. Machado, Teoria do Eletromagnetismo, Vol I, 2ªEdição Editora UEPG, 2005.
- [14] H. Moysés Nussenzweig, Curso de Física Básica 1, 1ª ed., editora Blucher.

Referências das Figuras

[1.1] <http://cpantiguidade.wordpress.com/2011/02/27/os-primitivos-da-mesopotamia/> acessado em 21 de agosto de 2014.

[1.2] <http://ventosdouniverso.blogspot.com.br/2010/08/modelo-geocentrico-e-o-aperfeicoamento.html> Acessado em 27 de julho de 2014.

[1.3] <http://ventosdouniverso.blogspot.com.br/2010/08/modelo-geocentrico-e-o-aperfeicoamento.html> Acessado em 27 de julho de 2014.

[1.4] http://www.portaldoastronomo.org/tema_pag.php?id=38&pag=2 Acessado em 23 de agosto de 2014.

[1.5] http://www.portaldoastronomo.org/tema_pag.php?id=38&pag=2 Acessado em 27 de julho.

[1.6] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Geocentrismo> acessado em 27 de julho de 2014.

[1.7] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Geocentrismo> acessado em 27 de julho de 2014.

[1.8] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Geocentrismo> acessado em 27 de julho de 2014.

[2.1] <http://ventosdouniverso.blogspot.com.br/2010/08/modelo-geocentrico-e-o-aperfeicoamento.html> Acessado em 27 de julho de 2014.

[4.1] <http://www.if.ufrgs.br/cref/camiladebom/Aulas/Pages/8.html> acessado em 01 de agosto de 2014.

[4.2] Fonte: <http://www.ferasnamateria.com.br/2014/05/leis-de-kepler.html>

Acessado em 01 de agosto de 2014